

Информатика, вычислительная техника и управление

УДК 681.518:622.276

РАСЧЕТ РЕЙТИНГА СКВАЖИН-КАНДИДАТОВ ПРИ УПЛОТНЯЮЩЕМ БУРЕНИИ С ПОМОЩЬЮ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ НА ПРОМЫСЛОВЫХ ДАННЫХ (МЕТОД ОПОРНЫХ ВЕКТОРОВ)

В.В. Колесов¹, Д.В. Курганов²

¹ АО «Пангея»

Россия, 127015, г. Москва, ул. Большая Новодмитровская, 12, стр. 1

² Самарский государственный технический университет

Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

***Аннотация.** Применение алгоритмов машинного обучения, в частности метода опорных векторов, является перспективным направлением для прогноза продуктивности скважин при уплотняющем бурении (расчета рейтинга). Существенным условием применения метода является наличие обширной цифровой базы с представительными результатами, позволяющей провести обучение модели. В работе рассмотрено применение метода опорных векторов для крупного месторождения в Западной Сибири, а также предложен алгоритм для формирования списка скважин-кандидатов для бурения с последующим ранжированием по совокупности факторов, определяющих дальнейшую эффективность реализуемой системы разработки. В алгоритме ранжирования также существенным образом применяется диаграмма Вороного, хорошо зарекомендовавшая себя как приближение к зоне дренируемых запасов скважины. Методика позволяет комплексировать такие параметры, как продуктивность и обводненность продукции окружающих скважин, плотность текущих запасов, параметры проведенных гидроразрывов пласта и энергетическое состояние потенциального участка для уплотняющего бурения, не прибегая к фильтрационному моделированию, которое в данном случае не позволяет уточнить и подтвердить параметры пластовой системы. Использована двойная модель: первая модель обучается на фильтрационных параметрах пласта, вторая – на емкостных параметрах. При этом ранг первой модели является одним из обучающих параметров для второй, что и позволяет учесть практически всю геолого-промысловую информацию. Метод будет особенно перспективен в осложненных коллекторах, например в двухпоровой среде, где связь между пластовыми параметрами (проницаемость, пористость, нефтенасыщенность) и промысловыми показателями разработки традиционными методами установить затруднительно, а также при наличии техногенных трещин, в частности от гидроразрыва пластов.*

Колесов Валентин Валентинович (к.ф.-м.н.), генеральный директор.

Курганов Дмитрий Владимирович (к.ф.-м.н., доц.), доцент кафедры «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений».

Ключевые слова: большие данные, машинное обучение, метод опорных векторов, классификация, рейтинг, дебит, нефть, скважина, выборка, запасы, гидроразрыв пласта, продуктивность, диаграмма Вороного, адаптация моделей.

Введение

Машинное обучение (МО) находит все большее применение в анализе и прогнозировании показателей разработки нефтегазовых месторождений как в связи с бурным развитием компьютерной техники и цифровых технологий, так и в связи с накоплением фактического материала по разработке месторождений [1]. Необходимым условием является наличие цифровой базы месторождения (или нескольких сходных месторождений), включающей в себя добычу, технологические режимы работы скважин, даты и объемы ГТМ и т. п. При этом алгоритмы использования МО не задействуют физические модели, традиционно используемые для описания предсказания состояния пластовой системы (материальный баланс, фильтрационное моделирование), ставя во главу статистическую обработку имеющихся данных для предсказания следующих состояний системы. Именно поэтому наличие так называемых больших данных становится столь критичным.

Известные свойства коллекторов – проницаемость, нефтенасыщенность, пористость – существенно влияют на добычу, однако во многих случаях не представляется возможным достоверно оценить их влияние на процессы разработки в силу значительной вариабельности указанных свойств как по разрезу, так и по простиранию. Адаптацию фильтрационных моделей подобных пластовых систем по истории разработки также зачастую не удается провести с удовлетворительной степенью точности, что влечет за собой невозможность восстановить геологию резервуара в межскважинном пространстве и уточнить параметры пласта. Также стоит отметить влияние различных ГТМ, в частности системных ГРП, на структуру порового пространства. Подобные вмешательства зачастую формируют вторую среду в резервуаре, образуя систему трещин, которая не описывается стандартными методами при инициализации моделей; кроме того, ситуация осложняется отсутствием данных о простирании и параметрах таких трещин.

Постановка задачи

Необходимо осуществить прогноз продуктивности и прогноз добычи нефти для уплотняющей скважины, находящейся в окружении действующих скважин с известными геолого-промысловыми данными на месторождении сложного строения, возможно с двойной средой. При решении задачи использовать методы машинного обучения, в частности метод опорных векторов.

В качестве примера работы алгоритма взято одно из месторождений Западной Сибири, пласт БВ₁₃. Залежь пластово-сводовая, строение сложное. Пласт характеризуется невысокой проницаемостью, значительной изменчивостью параметров по площади. На объект пробурено 180 скважин (87 действующих добывающих, 50 действующих нагнетательных), реализована очаговая система заводнения, всего было проведено около 90 ГРП. Текущая степень выработки 67 %, средняя обводненность продукции 88 %. Средний дебит скважин по жидкости составляет 60 т/сут (рис. 1). Нефть маловязкая, с высоким газосодержанием (см. табл.).

Моделирование пласта стандартными методами нельзя признать удовлетворительным. Результаты поскважинной адаптации гидродинамической модели по накопленной добыче нефти приведены на рис. 2. Видно, что расхождение доста-

точно существенно по многим скважинам, в том числе со значительной добычей. Это говорит о том, что с помощью имеющегося математического аппарата в рамках фильтрационной модели невозможно достоверно отразить процессы, происходящие при разработке данной залежи [2–4].

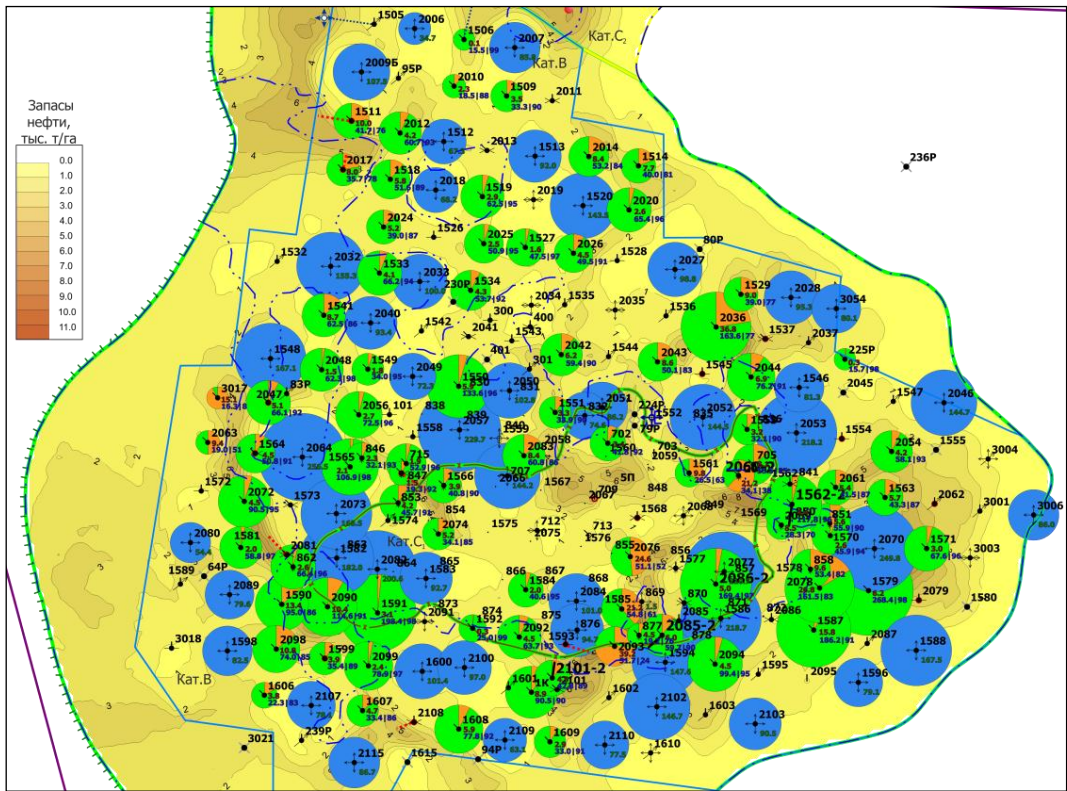


Рис. 1. Фрагмент распределения текущих отборов и закачки на карте текущих удельных запасов пласта БВ₁₃

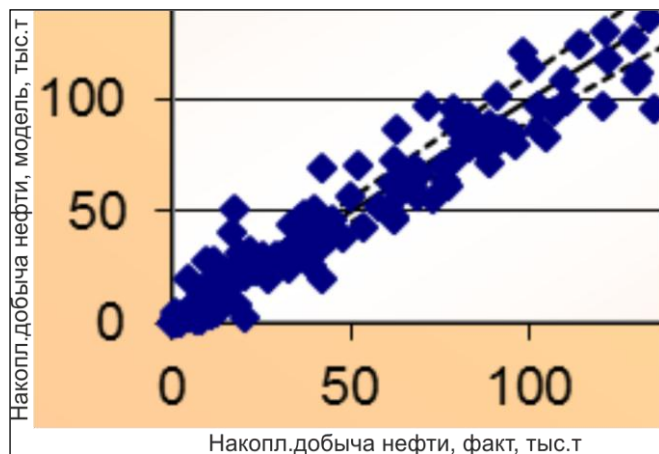


Рис. 2. Фрагмент кроссплота адаптации фильтрационной модели

Основные геолого-физические характеристики пласта БВ₁₃

Параметр	Размерность	Значение
Средняя глубина залегания кровли	м	2410
Абсолютная отметка ВНК	м	-2200–2202
Тип залежи	–	Пластовая сводовая
Тип коллектора	–	Терригенный поровый
Площадь нефтеносности	тыс. м ²	86 173
Средняя общая толщина	м	48,1
Средняя эффективная нефтенасыщенная толщина	м	7,1
Коэффициент нефтенасыщенности пласта	доли ед.	0,597
Проницаемость	мкм ²	0,051
Коэффициент песчаности	доли ед.	0,290
Расчлененность	ед.	9,5
Начальное пластовое давление	МПа	23
Вязкость нефти в пластовых условиях	мПа×с	0,4
Плотность нефти в поверхностных условиях	г/см ³	0,810
Объемный коэффициент нефти	доли ед.	1,59
Давление насыщения нефти газом	МПа	21,7
Газосодержание	м ³ /т	280
Коэффициент вытеснения	доли ед.	0,583
Коэффициент продуктивности	м ³ /сут×МПа	25,7

Одной из основных задач, решаемых недропользователем на этом объекте, является уплотняющее бурение скважин, а точнее, поиск оптимальных точек входа в пласт с учетом продуктивности и наличия остаточных запасов. Далее предлагается алгоритм для получения такого списка точек, а также их способ их ранжирования по совокупности признаков. Перед этим приводится краткое описание используемых понятий и алгоритмов.

Используемые понятия

Диаграмма Вороного P_i , построенная для точки измерений x_i , характеризуется тем, что содержит те и только те точки, расстояние от которых до точки x_i меньше или равно расстоянию до любой другой точки измерений x_j . При построении диаграмм Вороного используется система соседства, полученная в процессе триангуляции Делоне [5]. Границы диаграмм Вороного P_i состоят из отрезков серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольников Делоне.

Применительно к разработке месторождений границы диаграммы Вороного могут рассматриваться как границы зон дренирования (рис. 3).

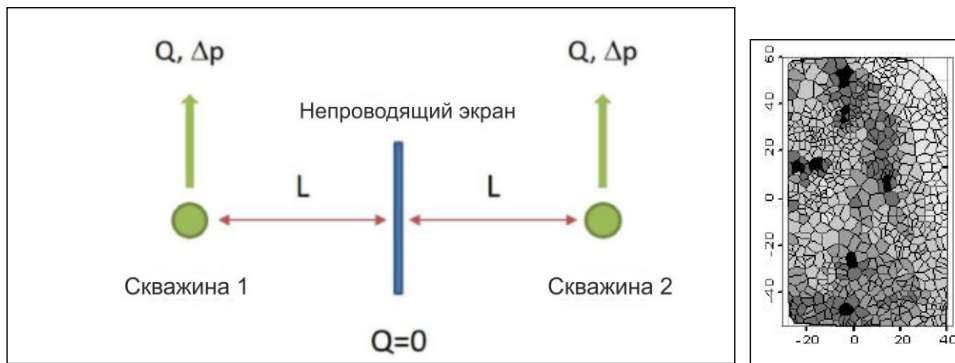


Рис. 3. Условие непроводящей границы: в силу того, что границы диаграммы Вороного находятся на одинаковом расстоянии от двух добывающих скважин, эти границы можно считать непроводящими (зоны дренирования); справа – площадное распределение диаграмм Вороного на месторождении

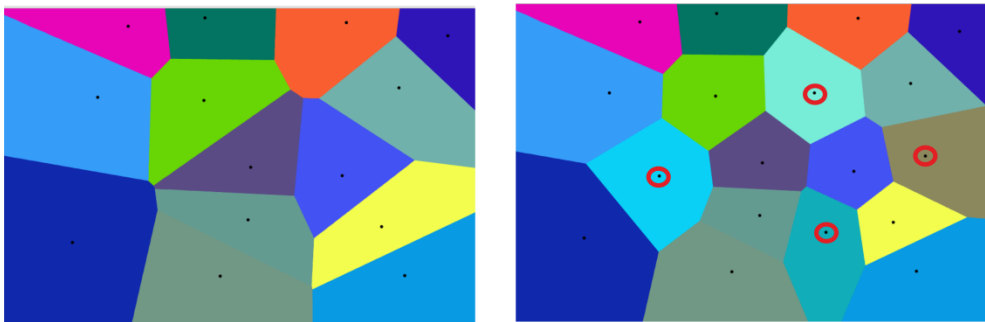


Рис. 4. Процедура добавления скважин и соответствующее изменение диаграмм Вороного (слева – до, справа – после добавления)

Уплотняющие скважины логично размещать вдоль границ диаграмм Вороного (рис. 4).

Метод опорных векторов является методом контролируемого МО, в котором создаваемой модели нужно сопоставить определенные значения других па-

раметров (обучить модель). Данный метод имеет два главных приложения – классификация и регрессия. В данной работе он используется для классификации и последующего ранжирования. Основы метода были заложены в начале 2000-х годов в работах Вапника [6], а более широкое применение и развитие получили в 2001 г. в работах Chang, Lin и далее в работах Статникова в 2009 г. [7].

Далее приводится упрощенное описание модели классификатора опорных векторов. Модель в общем случае пытается построить разделяющую гиперплоскость, которая делит пространство данных на два подкласса. Рис. 5 иллюстрирует описываемую идею в двумерном пространстве. Красная линия – это гиперплоскость, которая проводится таким образом, чтобы максимизировать расстояние между двумя классами данных в многомерном пространстве. Обведенные кружками векторы, являясь граничными, называются опорными векторами. Подобное разделение не всегда возможно, точнее, возможно лишь в том случае, когда исходные данные являются *линейно сепарабельными*.

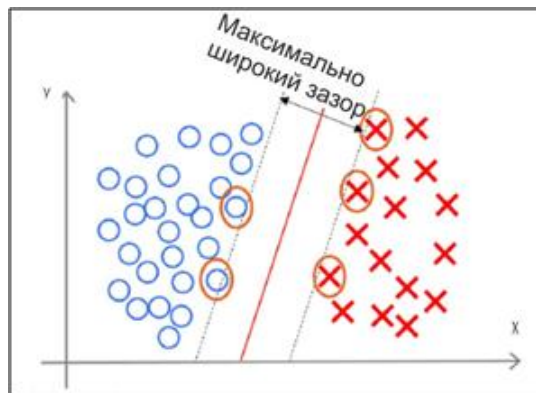


Рис. 5. Метод опорных векторов:

алгоритм разделяет данные на две группы гиперплоскостью (красная линия) таким образом, что зазор между ними максимизируется; векторы, обведенные кружками, являются опорными

Формальное описание проблемы классификации методом опорных векторов выглядит следующим образом [8, 9]. Предполагается, что элементы множества, которое следует упорядочить, имеют вид $\{(x_1, c_1), (x_2, c_2), \dots, (x_n, c_n)\}$, где c_i принимает значение 1 или (-1) в зависимости от того, какому классу принадлежит вектор x_i .

Каждое x_i – это p -мерный вещественный вектор, нормализованный значениями $[0, 1]$. Если точки не будут нормализованы, то точка с большими отклонениями от средних значений координат точек слишком сильно повлияет на классификатор. Эти векторы рассматриваются как учебная коллекция, в которой для каждого элемента уже задан класс, к которому он принадлежит. Требуется, чтобы алгоритм классифицировал их таким же образом. Для этого строится разделяющая гиперплоскость, которая имеет вид

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - b = 0.$$

Вектор \mathbf{w} – перпендикулярен к разделяющей гиперплоскости. Параметр $b/\|\mathbf{w}\|$ равен по модулю расстоянию от гиперплоскости до начала координат.

Для поиска оптимального разделения используются опорные векторы и гиперплоскости, параллельные оптимальной и ближайšie к опорным векторам

двух классов. Можно показать, что эти параллельные гиперплоскости могут быть описаны следующими уравнениям (с точностью до нормировки):

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - b = 1;$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - b = -1.$$

Если обучающая выборка линейно сепарабельна, то мы можем выбрать гиперплоскости таким образом, чтобы между ними не лежала ни одна точка обучающей выборки, и затем максимизировать расстояние между гиперплоскостями. Ширина полосы между ними равна $2/\|\mathbf{w}\|$; таким образом, требуется минимизировать $\|\mathbf{w}\|$. Чтобы исключить все точки из полосы, необходимо условие для всех i :

$$\begin{cases} \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i - b \geq 1, & c_i = 1 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i - b \leq -1, & c_i = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, проблема построения оптимальной разделяющей гиперплоскости сводится к минимизации $\|\mathbf{w}\|$ при условии (1). Это задача квадратичной оптимизации, которая имеет вид

$$\begin{cases} \|\mathbf{w}\|^2 \rightarrow \min \\ c_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i - b) \geq 1, & 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (2)$$

Можно показать, что решение задачи (2) имеет вид

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \mathbf{x}_i, \quad b = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i - c_i,$$

где $\lambda_i > 0$ – вектор двойственных переменных [10].

Если строго зафиксировать требование, что все образцы находятся вне полосы, то имеет место так называемая классификация с жестким зазором. Классификация с жестким зазором присущи две главные проблемы. Во-первых, она работает, только если данные являются линейно сепарабельными. Во-вторых, она довольно чувствительна к выбросам – нехарактерным элементам, которые в силу определенных причин оказались в чужом классе данных (например, из-за погрешности замеров). Чтобы избежать таких проблем, предпочтительнее применять более гибкую модель. Цель заключается в том, чтобы отыскать хороший баланс между удержанием полосы как можно более широкой и ограничением количества нарушений зазора (т. е. появлений экземпляров-выбросов, которые оказываются посередине полосы или даже на неправильной стороне). Это называется классификацией с мягким зазором. За это отвечает специальный регуляризирующий параметр модели. Его меньшее значение ведет к более широкой полосе, но и большему числу нарушений зазора. Подбор данного параметра является важным шагом при обучении модели на фактических данных [11].

Ранжирование элементов методом опорных векторов в общем случае осуществляется итерационно по следующей схеме. Выбирается какой-либо элемент из множества, которое следует упорядочить. Затем составляются попарные разности этого элемента и сравниваемых с ним элементов известного ранга, в результате чего образуются положительные и отрицательные величины (в смысле ранга), далее применяется стандартная схема по разделению исходного множества на два подмножества (классификация). В результате элемент оказывается

определенным по отношению ко всем остальным элементам известного множества. Та же самая процедура повторяется для всех элементов множества, которое следует упорядочить. В результате множество оказывается упорядоченным в смысле заранее определенного ранга. Таким образом, задача ранжирования сводится к серии задач классификации.

Отметим, что при ранжировании на каждом этапе может возникать проблема выбросов, которая решается методом регуляризации. Реализация алгоритма ранжирования проводится в пакете SVM-rank [8]. Подготовка базы данных для нее проводится с помощью авторских методик. Следует также отметить, что все данные должны быть первоначально нормированы, так как алгоритм чувствителен к ненормированным данным [12, 13].

Далее рассматриваются две различные задачи – прогноза продуктивности и прогноза добычи уплотняющей скважины. Назовем их соответственно модель I и модель II.

Для модели I рангом будет служить средний стартовый дебит жидкости. Для модели II – добыча нефти первого года.

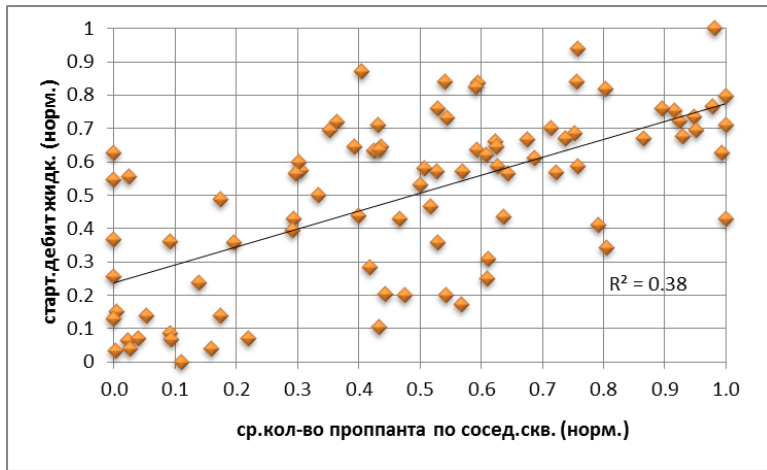
Методы решения

Для обучения модели I используются следующие параметры-наблюдения (среднее по соседним скважинам): использованное количество проппанта, использованное количество жидкости разрыва, дебит жидкости. Каждому вектору описанных параметров-наблюдений сопоставлен ранг (рейтинг) – средний стартовый дебит жидкости уплотняющей (центральной) скважины.

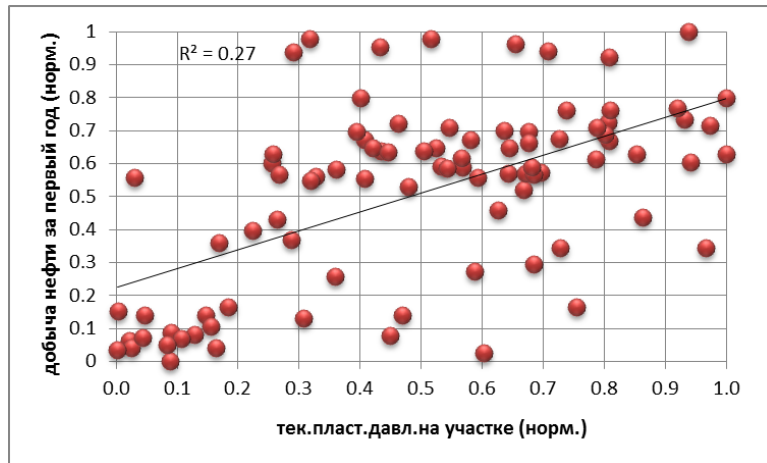
Для модели II обучающими параметрами будут служить энергетическое состояние участка (пластовое давление), текущая плотность запасов диаграммы Вороного, средняя обводненность по соседним скважинам, а также рассчитанный ранг по модели I. Для ранжирования использована годовая добыча нефти уплотняющей (центральной) скважины с участка.

Рис. 6 иллюстрируют наличие некой связи между входными и выходными параметрами моделей, однако линейная корреляция невысока и не может служить надежным инструментом прогнозирования. Именно поэтому и используются более сложные модели, в частности опорных векторов, для идентификации многомерных зависимостей, зачастую нелинейных.

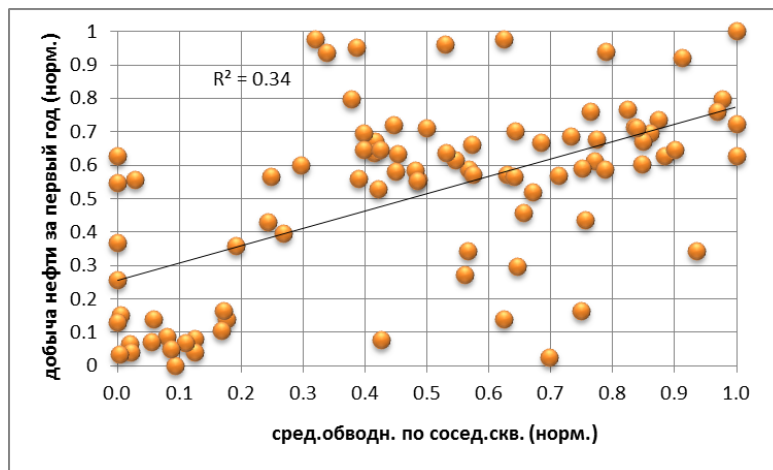




б

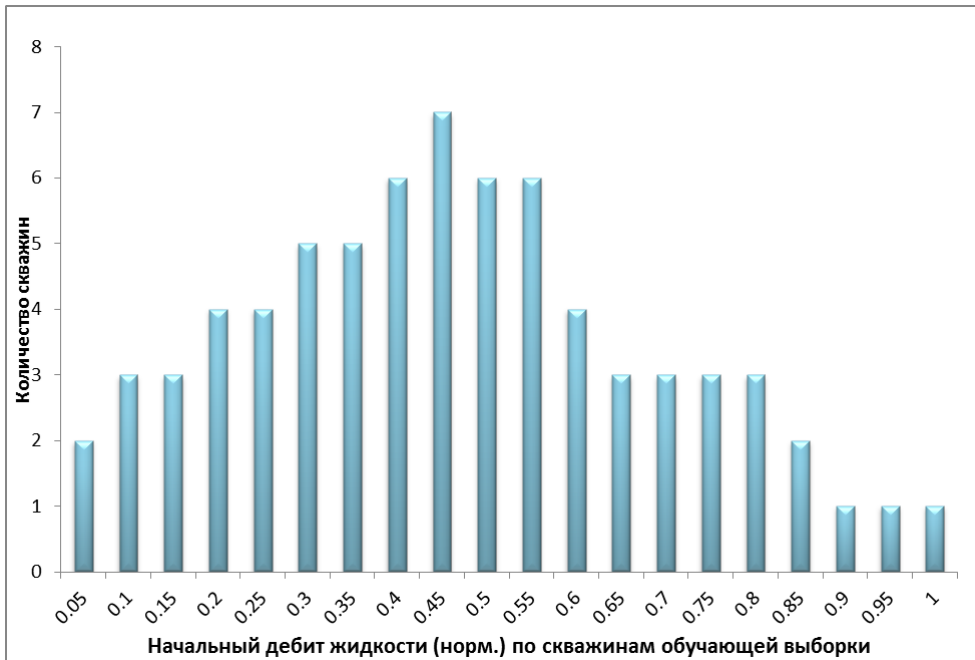


в

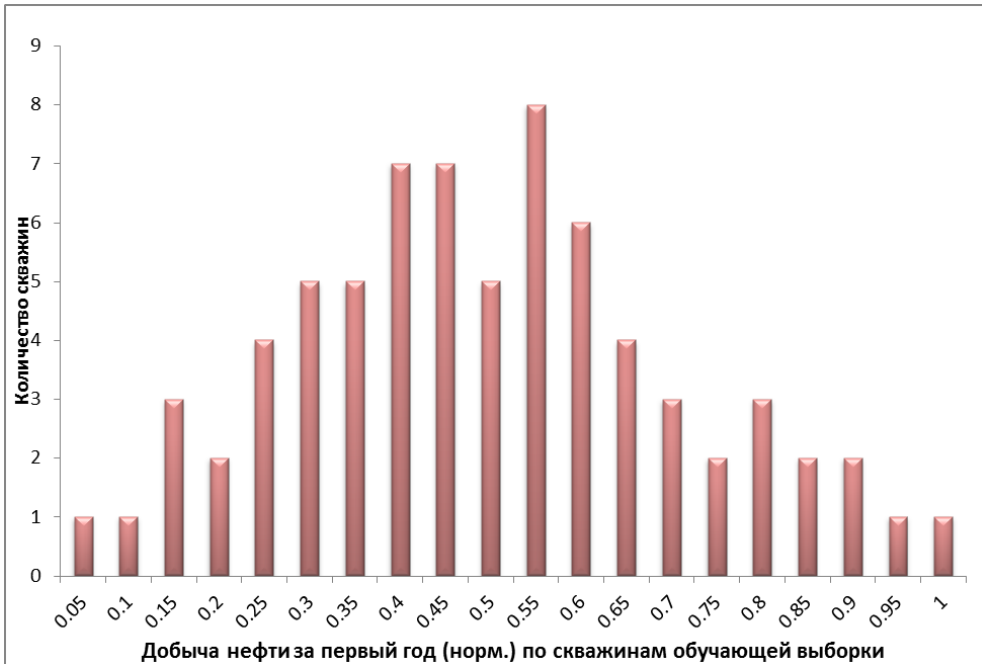


г

Рис. 6. Зависимости некоторых ключевых параметров моделей (а–г)



a



б

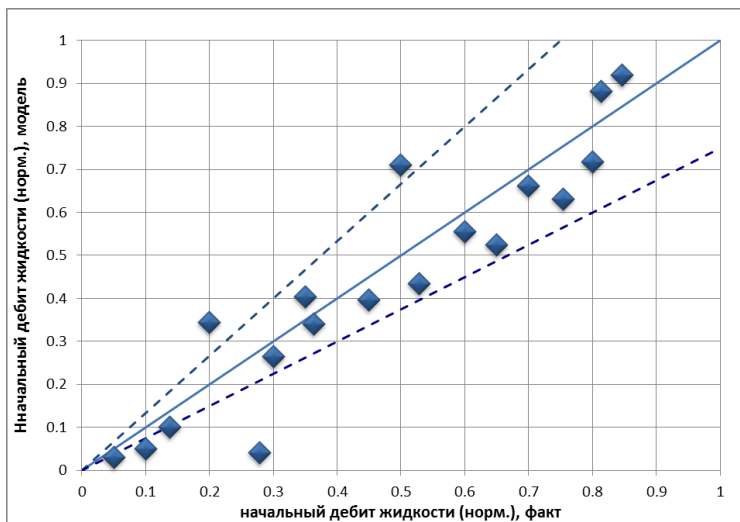
Рис. 7. Распределение ранга обучающей выборки по модели I (а) и по модели II (б)

Текущие запасы нефти на участке возможно рассчитать двумя способами: по результатам проведения промысловых геофизических исследований (ПГИ), при наличии, и по методике построения карты плотности линейных запасов, в обоих случаях не прибегая к гидродинамическому моделированию. На рассматриваемом

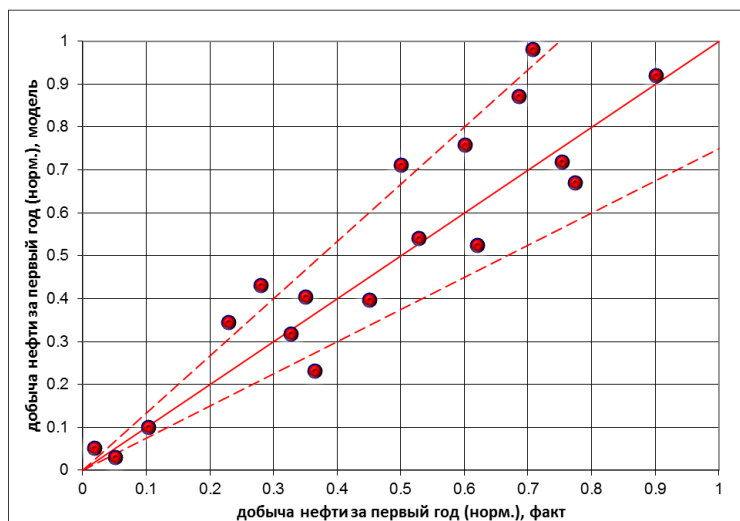
мом месторождении имеются многочисленные ПГИ, поэтому в основном выби-
рался первый способ.

Результаты

Стандартной практикой является тестирование моделей после обучения на фактических данных, а именно сопоставление полученных дебитов по модели I с фактическими, а также сопоставление добычи нефти по модели II за первый год с фактической. При этом из всего множества фактических результатов (90 скважин, являвшихся уплотняющими) выбирается случайным образом 80 % скважин, на них и проходит обучение (рис. 7), а на оставшихся 20 % проходит тестирование (валидация). Сопоставление фактических и полученных при тести-
ровании модели данных приведено на рис. 8. Сходимость по обеим моделям сле-
дует признать удовлетворительной.



a



b

Рис. 8. Результаты обучения моделей на тестируемой выборке:
по модели I (*a*) и по модели II (*b*)

Таким образом, алгоритм формирования списка скважин для уплотняющего бурения выглядит следующим образом:

- обосновывается экономически рентабельная минимальная величина извлекаемых запасов, приходящихся на одну скважину;
- строятся диаграммы Вороного для всех действующих скважин;
- в каждой из диаграмм подсчитываются текущие запасы;
- новые скважины размещаются вблизи границ диаграмм Вороного, имеющих максимальные запасы, но в то же время как можно дальше от остановленных/ликвидированных/нагнетательных скважин;
- в каждой из диаграмм вновь подсчитываются текущие запасы;
- в окончательный список попадают лишь скважины, дренируемые запасы которых превышают обоснованное значение;
- список ранжируется по модели I;
- список ранжируется по модели II; при этом скважины для первоочередного бурения будут иметь наивысший рейтинг.

Следует отметить, что использование модели II опционально, для промышленных нужд зачастую достаточно применение более простой модели I. При этом может осуществляться и дополнительное ранжирование с помощью других методов, в том числе геолого-статистических. Затем, комплексировав все рейтинги (например, простым суммированием с весами), можно сформировать единый рейтинг бурения.

Заключение

Таким образом, в работе предложен алгоритм, позволяющий более строго подойти как к формированию списка скважин-кандидатов для уплотняющего бурения, так и к ранжированию этого списка с целью определения наиболее перспективных участков с помощью промысловых данных.

Следует отметить, что в сравнении со стандартными способами обоснования дебитов скважин – с помощью картирования свойств и закона Дарси – данный способ позволяет учесть как особенности данного конкретного месторождения, так и свойства, не описываемые стандартными законами фильтрации, в частности техногенную трещиноватость породы [14, 15].

Применение метода позволяет увеличить надежность прогноза там, где традиционные методики обоснования свойств коллектора не показывают значимых результатов. Принимая во внимание значительную стоимость строительства скважин и боковых стволов, следует отметить, что по экспертной оценке комплексное применение описанного алгоритма позволит отбраковать 15–20 % потенциальных скважин-кандидатов, соразмерно снизив совокупные затраты недропользователя на бурение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zangl G., Hannerer J.* Data Mining: Applications in the Petroleum Industry. Katy, TX, Round Oak Publishing, 2003. 222 p.
2. *Курганов Д.В., Попков В.И., Хмелевских Е.И.* Оценка влияния низкопроницаемых прослоев коллектора на эффективность выработки запасов нефти с использованием трехмерных гидродинамических моделей // Известия Самарского научного центра РАН. Спец. выпуск – проблемы нефти и газа. – 2002. – С. 121–126.
3. *Курганов Д.В.* Идентификация параметров математических моделей многофазной фильтрации в нефтяных пластах: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Самара: Самар. гос. ун-т, 2003. – 134 с.
4. *Курганов Д.В.* О численном решении одной задачи минимизации в моделировании пластовых систем // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2003. – Т. 6. – № 1. – С. 51–59.
5. *Демьянов В.В., Савельева Е.А.* Геостатистика: теория и практика. – М.: Наука, 2010. – 327 с.

6. *Vapnik V.* The Nature of Statistical Learning Theory, second edition. New York, USA, Springer-Verlag, 2000. 425 p.
7. *Statnikov V. et al.* A Gentle Introduction to Support Vector Machines in Biomedicine // *AMIA Annual Symposium*, San Francisco, CA, USA, 2009. P. 118–129.
8. *Joachim T., Scholkopf B., Burges C., Smola A. (ed.)* Making large-Scale SVM Learning Practical. Advances in Kernel Methods – Support Vector Learning, USA, MIT-Press, 1999. 521 p.
9. *Hand D.J., Manilla H., Smyth P.* Principles of Data Mining, USA, MIT-Press, 2001, 546 p.
10. *Han J., Kamber M., Pei J.* Data Mining: Concepts and Techniques, USA, Elsevier, 2012. 703 p.
11. *Wu X., Kumar V.* The Top Ten Algorithms in Data Mining, USA, Taylor & Francis Group, 2009. 201 p.
12. *Busby D., Pivot F., Tadjer A.* Use of data analytics to improve well placement optimization under uncertainty // SPE International Petroleum Exhibition & Conference, Abu-Dhabi, UAE, 2017. P. 324–329.
13. *Kim T.H., Crane D.J., Grijalva E.F.* Infill Well Location Selection Procedures in Lost Hills Using Machine Learning // SPE Western Regional Meeting, California, USA, 2018. P. 122–128.
14. *Смехов Е.М., Дорофеева Т.В.* Вторичная пористость горных пород-коллекторов нефти и газа. – Л.: Недра, 1987. – 96 с.
15. *Колесов В.В., Курганов Д.В.* Интегрированное моделирование неоднородности и связности гигантского карбонатного резервуара по геофизическим и промысловым данным на поздней стадии разработки с целью локализации остаточных запасов нефти // Материалы технической конференции SPE «Разработка зрелых месторождений». – М., 2017. – P. 121–129.

Статья поступила в редакцию 23 января 2019 г.

WELL RANKING FOR IN-FILL DRILLING USING MACHINE LEARNING WITH PRODUCTION AND GEOLOGICAL DATA

V.V. Kolesov¹, D.V. Kurganov²

¹ АО «Pangeya»

1 str., 12, Bolshaya Novodmitrovskaya st., Moscow, 127015, Russian Federation

² Samara State Technical University

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Abstract. *In machine learning, support-vector machines (SVM) are supervised learning models with associated learning algorithms that analyze data used for classification analysis. In this paper SVM-rank model is applied for productivity prediction of infill wells for giant Western Siberian oilfield. An essential condition for method's application is availability of digital databases with representative results which allows adequate model training. Ranking algorithm also uses Voronoi diagram, proven as an approximation to the well drainage area. Complex method allows combine different reservoir and production parameters: productivity and water cut of surrounding wells, frac parameters etc without common reservoir dynamics model, which in this particular case is not able to clarify and confirm the parameters of the reservoir system. There is double model used: the first model utilizes productivity reservoir parameters, the second one uses capacity parameters. The rank of the first model is one of the training options for the second model, and both of them take into account all the geological and production information. The method can be particularly useful in complicated reservoirs, e.g. in dual porosity ones, where the relationship between formation parameters (permeability, porosity, saturation) and production rates is unclear and cannot be set by traditional development analysis, particularly in frac environment.*

Valentin V. Kolesov (Ph.D. (Phys.& Math.)), General Direktor.

Dmitry V. Kurganov (Ph.D. (Phys.& Math.)), Associate Professor.

Keywords: *Big data, Machine Learning, Support Vector Machines, Classification, Rank, Oil Rate, Well, Sample, Fluid-in-Place, Frac, Productivity Index, Voronoi Diagram, History Matching.*

REFERENCES

1. *Zangl G., Hannerer J.* Data Mining: Applications in the Petroleum Industry. Katy, TX, Round Oak Publishing, 2003. 222 p.
2. *Kurganov D.V., Popkov V.I., Khmelevskikh Ye.I.* Estimation of low permeability layers on field development process using reservoir simulation // *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo tsentra RAN. Spets. vypusk – problemy nefti I gaza*, 2002. P. 121–126.
3. *Kurganov D.V.* Identifikatsiya parametrov matematicheskikh modeley mnogofaznoy fil'tratsii v neftyanykh plastakh: Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk, Samara: Samar. gos. un-t, 2003. 134 pp.
4. *Kurganov D.V.* Numerical solution of one minimization problem in reservoir simulation // *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2003, t. 6, № 1, P. 51–59.
5. *Dem'yanov V.V., Savel'yeva E.A.* Geostatistika: teoriya i praktika. M.: Nauka, 2010. 327 pp.
6. *Vapnik V.* The Nature of Statistical Learning Theory, second edition. New York, USA, Springer-Verlag, 2000. 425 p.
7. *Statnikov V. et al.* A Gentle Introduction to Support Vector Machines in Biomedicine // *AMIA Annual Symposium*, San Francisco, CA, USA, 2009. P. 118–129.
8. *Joachim T., Scholkop B., Burges C., Smola A. (ed.)* Making large-Scale SVM Learning Practical. Advances in Kernel Methods – Support Vector Learning, USA, MIT-Press, 1999. 521 p.
9. *Hand D.J., Manilla H., Smyth P.* Principles of Data Mining, USA, MIT-Press, 2001, 546 p.
10. *Han J., Kamber M., Pei J.* Data Mining: Concepts and Techniques, USA, Elsevier, 2012. 703 p.
11. *Wu X., Kumar V.* The Top Ten Algorithms in Data Mining, USA, Taylor & Francis Group, 2009. 201 p.
12. *Busby D., Pivot F., Tadjer A.* Use of data analytics to improve well placement optimization under uncertainty // *SPE International Petroleum Exhibition & Conference*, Abu-Dhabi, UAE, 2017. P. 324–329.
13. *Kim T.H., Crane D.J., Grijalva E.F.* Infill Well Location Selection Procedures in Lost Hills Using Machine Learning // *SPE Western Regional Meeting*, California, USA, 2018. P. 122–128.
14. *Smekhov Ye.M., Dorofeeva T.V.* Dual porosity oil and gas reservoirs, Leningrad: Nedra, 1987. 96 pp.
15. *Kolesov V.V., Kurganov D.V.* Integrated modeling of heterogeneity and conductivity of giant mature carbonate reservoir using complex geophysic and production data // *Proceedings of SPE Conference «Razrabotka zrelykh mestorozhdeniy»*, M., 2017. P. 121–129.

УДК 332.055.2/330.46

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ СОГЛАСОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА С РЕГИОНАЛЬНЫМ РЫНКОМ

А.М. Пищухин

Оренбургский государственный университет
Россия, 460018, г. Оренбург, пр. Победы, 13

***Аннотация.** Рынок можно считать самым ярким представителем стохастических процессов. Но и производство продукции тоже нельзя считать детерминированным. Следовательно, при управлении предприятием необходимо добиваться согласования двух стохастических процессов. В данном исследовании была выбрана модель поведения рынка и производственного процесса, подчиняющаяся уравнению Колмогорова. Далее в работе поставлен вопрос: как лучше управлять производством – плавно разгоняя и замораживая объемы производства или, в соответствии с классическим правилом «время – деньги», применяя максимально быстрое торможение и ускорение? В итоге показано, что для продукта с длинным производственным циклом наибольшей эффективностью обладает оптимальное управление, основанное на методе Эйлера – Лагранжа, а если производственный цикл короткий, то необходимо управление с максимальным приложением управляющих воздействий.*

***Ключевые слова:** следящее управление, уравнение Колмогорова, стохастический рыночный процесс, стохастичность производства продукции, согласование стохастических процессов, метод Летова, метод Эйлера – Лагранжа.*

Введение

Согласованность составляющих является важнейшим условием высокой эффективности любой системы [1]. Поскольку предприятие производит продукцию с ориентацией на рынок, согласованность системы «предприятие – рынок» должна быть как можно выше. И в первую очередь этот тезис относится к объемам производства продукции на предприятии и спросу на данную продукцию на рынке. За формированием цен и объемами продаж предприятие следит особенно тщательно [2–5]. Очевидно, что и процесс формирования цены на рынке, и объем производимой продукции на предприятии из-за влияния большого количества случайных факторов носят стохастический характер. Естественно, при этом говорить о согласованности необходимо в вероятностном смысле и применять для описания процессов соответствующий математический аппарат.

Постановка задачи и метод ее аналитического решения

Вероятностное описание рыночных процессов встречается в литературе довольно часто. В работе [6] поведение рыночной среды описывается с помощью теории систем массового обслуживания на основе уравнений Колмогорова. Для повышения степени согласованности инерционных рыночных процессов и процессов производства необходимо прогнозирование, поэтому вероятностная модель на основе уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова рассматривалась как

Пищухин Александр Михайлович (д.т.н.), профессор.

инструмент прогнозирования [7]. Прогнозирование – лишь первая функция управления, понятно, что исследуемая согласованность напрямую зависит от эффективности процессов управления, которая также оценивалась на основе уравнения Колмогорова [8]. Марковские модели применялись при исследовании тайваньских бизнес-циклов в [9] и в управлении цепями поставок [10]. В последней работе спрос был марковским процессом, а объемы заказов и цена реализации товара – управляющими воздействиями. В работе [11] марковская модель использовалась для прогнозирования момента наступления повышенного спроса на кредиты. В [12] марковская модель применена необычным образом – для анализа долгосрочных свойств акций и дивидендов в США. Работа [13] посвящена исследованию стохастического процесса формирования цены на основе цепей Маркова. Работа [14] посвящена глубокому исследованию потоков в современной электронной торговле на основе высокочастотных баз данных. И, конечно, вероятностный подход в самом чистом виде реализуется в имитационных моделях [15]. Подводя итог проведенному анализу, можно утверждать, что вероятностные инструменты являются часто и широко используемыми в экономических исследованиях, а марковские модели, несмотря на первое приближение, позволяют выявлять основные тенденции экономических явлений.

Пусть вероятность превышения рыночной цены на продукцию над себестоимостью ее изготовления на предприятии имеет марковскую природу и описывается уравнением Колмогорова [16]:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = -a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где ω_1 – плотность описанной выше вероятности, зависящая от рыночного спроса на продукцию x ;

a_1 – коэффициент сноса;

b_1 – коэффициент диффузии.

Уравнение (1) может быть решено с использованием функции Грина [17]. Однако сначала его необходимо привести к каноническому виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Осуществляется это с помощью подстановки:

$$\omega_1 = e^{\mu x + \lambda t} \cdot w, \text{ при } \mu = \frac{a_1}{2b_1}, \lambda = -\frac{a_1^2}{4b_1} \quad (3)$$

при начальном условии

$$w(x, 0) = \varphi(x), 0 < x < \infty \quad (4)$$

и граничном условии

$$w(0, t) = 0. \quad (5)$$

Тогда решение уравнения (1) представляется в виде [13, с. 236]

$$\omega_1 = e^{\frac{a_1}{2b_1}x - \frac{a_1^2}{4b_1}t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{b_1 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4b_1 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Готовность предприятия, изготавливающего эту продукцию, должна подчиняться похожему на (1) уравнению с добавлением в правой части управляющего воздействия $u(x,t)$, обеспечивая функцию слежения за рынком, то есть превращая наше управление в следящее [18, 19]. При этом плотность вероятности ω_2 отражает готовность производства к удовлетворению возникшего спроса:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} = -a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u(x,t). \quad (7)$$

Это уравнение является неоднородным, его решение должно рассматриваться при выполнении начальных условий

$$\omega_2(x,0) = 0; \omega_2(0,t) = 0. \quad (8)$$

Вводя в данном случае l – границу возможностей предприятия по обеспечению спроса на его продукцию и t_f – конечное время управления, получим решение с учетом (3), которое записывается в виде

$$\omega_2 = e^{\frac{a_2}{2b_2}x - \frac{a_2^2}{4b_2}t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{b_1(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4b_1(t-\tau)}} \right\} u(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (9)$$

Поставим задачу: управлять предприятием так, чтобы возможности выпуска продукции как можно ближе соответствовали благоприятному периоду превышения спроса цены на рынке над себестоимостью изготовления продукции на предприятии. Такой подход доминирует при выборе различных стратегий управления [20–22].

Для нахождения соответствующих управляющих воздействий воспользуемся теорией аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), предложенной профессором Летовым А.М. [23, 24]. В этой теории функционал строится в виде суммы квадратов потерь от разности двух вероятностей и затрат на повышение готовности производственной системы к обеспечению образовавшегося спроса:

$$F = \int_0^{t_f} [q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2] dt, \quad (10)$$

где q – размерный весовой коэффициент.

Применим для решения данной задачи метод Эйлера – Лагранжа. Построим лагранжиан

$$L = q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2 + \psi_1 \left(-a \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right) + \psi_2 \left(-a \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u - \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right). \quad (11)$$

Из него можно выделить гамильтониан

$$H = q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2 + \psi_1 \left(-a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \right) + \psi_2 \left(-a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u \right). \quad (12)$$

Составляем сопряженные уравнения и уравнение Эйлера для u :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \omega_1} = -2q(\omega_1 - \omega_2) \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega_2} = 2q(\omega_1 - \omega_2) \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Подстановка ψ_2 из третьего уравнения этой системы во второе дает:

$$\omega_2 = \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_1 \quad (14)$$

Введем обозначение [25]:

$$s = \omega_1 - \omega_2 \quad (15)$$

Тогда (14) преобразуется следующим образом:

$$s = -\frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (16)$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (7):

$$\frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial t} = -a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} - u \quad (17)$$

Преобразуем его к разности $\omega_1 - \omega_2$

$$\frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial t} = -(a_1 - a_2 + a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2 + b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} - u. \quad (18)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial t} &= -a_2 \frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2(\omega_1 - \omega_2)}{\partial x^2} - \\ &- (a_1 - a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} - u. \end{aligned} \quad (19)$$

Воспользовавшись теперь (15) и (16), получим

$$-\frac{1}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a_2}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{b_2}{q} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + u = -(a_1 - a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \quad (20)$$

Если $a_2 = a_1$ и $b_2 = b_1$, то правая часть обнулится. В противном случае имеем неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$$-\frac{1}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a_2}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{b_2}{q} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + u = 0 \quad (21)$$

Воспользуемся методом разделения переменных, для чего представим управляющее воздействие в виде произведения двух функций:

$$u = p(x) \cdot v(t) \quad (22)$$

Подставляя это выражение в (21), получим:

$$\frac{1}{q} p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{a_2}{q} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{b_2}{q} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - pv = 0 \quad (23)$$

Разделив обе части (23) на $p \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$, имеем

$$\frac{1}{q} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{a_2}{qp} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{b_2}{qp} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{v}{\frac{\partial v}{\partial t}} = 0 \quad (24)$$

Разделяем переменные:

$$\frac{1}{q} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{v}{\frac{\partial v}{\partial t}} = -\frac{a_2}{qp} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{b_2}{qp} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = M \quad (25)$$

Таким образом, решение уравнения (21) сводится к решению системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Mq \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - qv = 0; \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Mq}{b_2} \cdot p = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Эти уравнения имеют решения следующего вида:

$$\begin{cases} v = C_1 \exp \frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t + C_2 \exp \frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t; \\ p = C_3 \exp \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x + C_4 \exp \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x. \end{cases} \quad (27)$$

Что касается частного решения (20), то оно ищется в виде правой части:

$$u_p = -(a_1 - a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \quad (28)$$

Ввиду сложности нахождения аналитического решения поступим чуть по-другому. Это выражение показывает, что часть ресурсов управляющих воздействий необходимо направить на выравнивание коэффициентов сноса и диффузии

у процессов формирования цены на рынке и обеспечения готовности предприятия к выполнению запросов рынка. Такая задача в первую очередь должна ставиться перед маркетинговой службой предприятия. Положив здесь, что поставленная задача успешно решается, примем указанные коэффициенты одинаковыми, тогда решение примет вид

$$u(x,t) = \left(C_1 e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} + C_2 e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} \right) \times \left(C_3 e^{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} + C_4 e^{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right). \quad (29)$$

Для нахождения констант интегрирования используем следующие начальные и граничные условия:

$$u=0 \text{ при } t=0; u=0 \text{ при } x=0; s=-\dot{u}=0 \text{ при } t=t_f. \quad (30)$$

В данном случае начальные и граничные условия приняты из того факта, что в начале управления управляющие воздействия не подаются, а при нулевой востребованности продукции на рынке управляющие воздействия вообще не нужны. Последнее условие следует из уравнения (16) и из соображений экономии управляющих ресурсов – то есть остановки их подачи при достижении равенства плотностей вероятностей ω_1 и ω_2 .

В результате получаем следующую систему трех уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_3 + C_4 = 0 \\ C_1 \frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t_f} + \\ + C_2 \frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t_f} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Из первых двух уравнений понимаем, что коэффициенты C_1, C_2 , так же как и C_3, C_4 , одинаковы по модулю и противоположны по знаку, следовательно, они могут быть вынесены в решении (22) в качестве множителей. Однако понятно, что решение дифференциального уравнения (21) может быть определено с точностью до постоянного множителя, поскольку u входит во все слагаемые, поэтому численно константы можно не определять, а находить из соображений размерности.

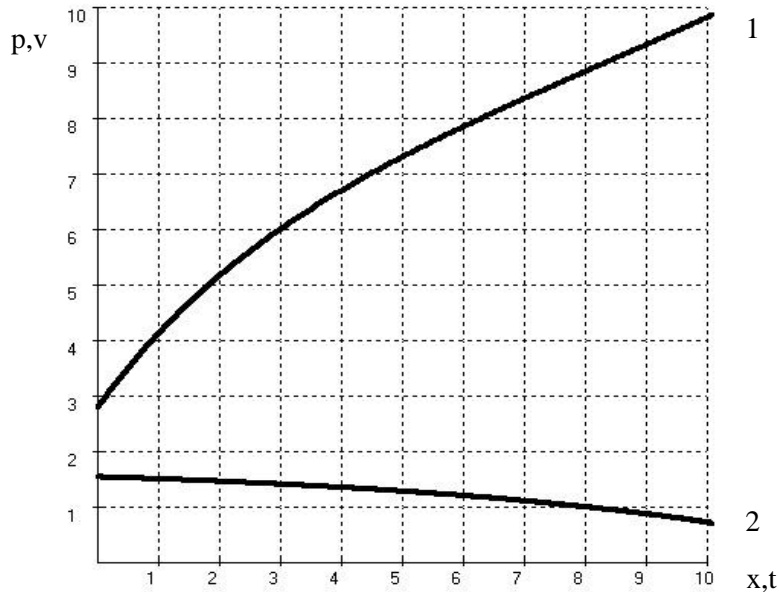
Общий ход графиков изменения составляющих управляющего воздействия представлен на рисунке. Верхний график отображает зависимость от спроса, нижний – от времени.

В последнем уравнении системы (31) два неизвестных: константа M и время управления t_f . Дополнительное уравнение можно получить, приравнявая плотности вероятностей ω_1 и ω_2 , полученные из уравнений (6) и (9) соответственно. При этом в уравнение (6) подставляются единичные начальные значения плотности

вероятностей $\varphi(x)$, а в уравнение (9) – полученное выражение управляющих воздействий (29). Для выполнения интегрирования необходимо воспользоваться формулой

$$\int e^{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma} \quad (32)$$

Бесконечные пределы в данном случае не нарушают никаких условий, так как спрос может быть только больше нуля, они даже упрощают выражения (6) и (9), оставляя в них одно слагаемое вместо двух [13].



Графики изменения составляющих управляющего воздействия:
1 – $p(x)$; 2 – $v(t)$

Равенство плотностей вероятностей дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b_1 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1 t_f}} \right\} d\xi = \\ & = C_1 C_2 \int_0^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b_1 t_f}} \right\} \left(e^{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2} \xi}{2b_2}} + e^{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2} \xi}{2b_2}} \right) d\xi \times \\ & \times \left(e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} + e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} \right) dt \end{aligned} \quad (33)$$

Приводим подынтегральное выражение к виду (32):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b_1 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1 t_f}} \right\} d\xi = \\
& = C_1 C_3 \int_0^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi b_1 \tau}} \left\{ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b_1 \tau} - \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} (\xi-x) + \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right. \\
& \left. + e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b_1 t_f} - \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} (\xi-x) + \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right\} d\xi \times \\
& \times \left(e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} \tau} + e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} \tau} \right) d\tau
\end{aligned}$$

После выполнения интегрирования в бесконечных пределах по спросу, принятых для упрощения вычислений, затем по времени, преобразований и подключения третьего уравнения из (31) система приобретает вид

$$\begin{cases}
\left(Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q} \right) \exp\left(\sqrt{M^2 q^2 + 4q} \right) t_f + Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q} = 0 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) = C_1 C_3 \cdot \\
\left(\frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_1} e^{(b_1 y_3^2 + y_1) t_f} + \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_1} e^{(b_1 y_4^2 + y_1) t_f} + \frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_2} e^{(b_1 y_3^2 + y_2) t_f} + \right. \\
\left. \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_2} e^{(b_1 y_4^2 + y_2) t_f} - \frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_1} - \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_1} - \frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_2} - \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_2} \right)
\end{cases} \quad (34)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2}; y_2 = \frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2}; y_3 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2}; \\
y_4 &= \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2}.
\end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) - \text{интеграл ошибок.}$$

Решим теперь эту задачу на основе принципа максимума Понтрягина. Для этого потребуем, чтобы управляющее воздействие по модулю не превосходило a , и при этом условии максимизируем гамильтониан (12):

$$\max_{-a \leq u \leq a} \left\{ \begin{aligned} & q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2 + \psi_1 \left(-a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \right) + \\ & + \psi_2 \left(-a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

или

$$\max_{-a \leq u \leq a} \{ u^2 + \psi_2 u \} \quad (36)$$

Очевидно, что максимум обуславливается вторым слагаемым. Первый его сомножитель находим из второго уравнения системы (13):

$$\psi_2 = \int_0^t 2q(\omega_1 - \omega_2) dt \quad (37)$$

Если ограничиться управлением до первого уравнивания плотностей вероятностей, то знак управляющих воздействий меняться не будет. Общее время управления можно определить аналогично предыдущему расчету, приравнявая плотности вероятностей ω_1 и ω_2 , полученные из уравнений (6) и (9) соответственно. При этом в уравнение (6) так же подставляются единичные начальные значения плотности вероятностей $\varphi(x)$, а в уравнение (9) – максимальное значение управляющих воздействий a . Интегрирование приводит к следующему результату:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) \quad (38)$$

Время управления t_f можно определить, решая это трансцендентное уравнение численным методом.

Выявление критерия сравнения

Из рассмотренной теории следует, что существует два способа управления предприятием. Первый заключается в нахождении рыночного тренда в плотности вероятности превышения цены на продукт себестоимости его изготовления и достижении плотностью вероятности, выражающей готовность предприятия к производству уровня этого тренда за счет экспоненциального (плавного) управляющего воздействия. Второй предусматривает более острое реагирование на отклонение производства от рынка и предусматривает максимальное управляющее воздействие, прилагаемое для разгона или торможения производства в зависимости от соотношения между рассмотренными выше вероятностями.

Затраты на управление можно оценить виртуальной работой [25]:

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_f} \int_0^l u(x,t) e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} dx dt. \quad (39)$$

Гауссиан в этой формуле отражает плотность вероятности спроса на продукцию (чаще всего спрос на рынке равен математическому ожиданию x_m и, следовательно, при таком значении виртуальная работа чаще осуществляется во времени). Считая виртуальную работу одинаковой при двух рассмотренных спо-

способах управления (а также учитывая тот факт, что при управлении по принципу максимума происходит переключение управления с $+a$ на $-a$ и наоборот, поэтому берем a по модулю), получим

$$\begin{aligned} & \frac{|a|t_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ & = \int_0^\infty \left(C_3 e^{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} + C_4 e^{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right) e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} dx \times \\ & \times \int_0^{t_2} \left(C_1 e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t} + C_2 e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t} \right) dt \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь верхний предел спроса взят бесконечным, чтобы воспользоваться интегралом Эйлера – Пуассона (32), а конечное время управления обозначено соответственно индексами: t_1 для решения с помощью принципа максимума, t_2 для решения методом Эйлера – Лагранжа. После интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \frac{|a|\sigma t_1}{\sqrt{2}} = & C_1 C_2 \sqrt{2\pi\sigma^2} \left(e^{\frac{\sigma^2(a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2})^2}{2b_2}} + e^{\frac{\sigma^2(a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2})^2}{2b_2}} \right) \\ & \left(\frac{Mq - \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{q} e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t_2} + \right. \\ & \left. + \frac{Mq + \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{q} e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t_2} - 2M \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Это выражение задает соотношение между величиной управляющих воздействий при применении принципа максимума и константами интегрирования в методе Эйлера – Лагранжа, то есть при двух способах управления. Теперь можно найти разность между интегралами от плотностей вероятности рынка и предприятия и оценить тем самым разность в объемах продаж продукции при двух способах управления:

$$\Delta V = \int_0^{t_1} 2q\{\omega_1 - \omega_2(u_1)\}dt - \int_0^{t_2} 2q\{\omega_1 - \omega_2(u_2)\}dt \quad (42)$$

Среднюю интенсивность проведения управляющих воздействий можно выразить по формуле

$$I = \frac{A}{t_f} \quad (43)$$

В данном случае она будет выше при применении в управлении принципа максимума Понтрягина во столько раз, во сколько отличаются времена управления t_1 и t_2 . Понятно, что на поддержание более высокой интенсивности придется прикладывать дополнительные усилия и, соответственно, будут присутствовать дополнительные затраты, которые можно считать в первом приближении пропорциональными интенсивности. С другой стороны, важен масштаб производства, на котором необходимо проявить эту интенсивность. Данное исследование направлено на согласование масштаба производства со спросом. Важно также, как спрос может входить в формулу. Учитывая, что при нулевом спросе интенсивность управляющих воздействий не к чему прикладывать – производства нет, будем рассматривать их произведение

$$Z(I, x) = \alpha Ix \quad (44)$$

Здесь α – коэффициент, уравнивающий размерность.

Сравнивая теперь эти затраты с полученной прибылью, зависящей от объема ΔV , определенного по формуле (40), и цены на данный вид продукции, можно по знаку разности между ними выбрать способ управления производством.

Данные и метод

Для практического сравнения рассмотренных способов управления использовались данные предприятия АО «Новосергиевский маслозавод».

Продукция Новосергиевского маслозавода уже долгое время пользуется спросом у жителей Оренбурга и области. Ассортимент включает масло сливочное, молоко и сливки, кисломолочную продукцию, пробиотические продукты, творог и сметану, масло топленое, сывороточные напитки и сыворотку, минеральную воду и газированные напитки, подсолнечное масло и сухое молоко. Как видим, ассортимент довольно разнообразен и позволяет путем быстрого варьирования объемов получать значительную экономию за счет соответствия спросу, учитывая дополнительно, что основная масса продукции – скоропортящаяся.

В качестве продуктов для исследования эффективности разработанной методики были выбраны масло сливочное и молоко, проводились наблюдения за работой одной торговой точки. Полученные результаты сведены в таблицу.

Показатели эффективности разработанной методики

Показатель	Молоко	Масло
Цена, руб.	38	81
Суточный спрос, кг.	75	40
Время окончания управления t_1 (ч), формула (37)	3	48
Время окончания управления t_2 (ч), формула (32)	5	72
ΔV , формула (40)	12	25
Разность затрат $\Delta Z(I, x)$ (руб), формула (42)	612,5	648
Знак разности дохода и затрат	–	+

Результаты и обсуждение

Полученные результаты показывают, что для продукта с длинным производственным циклом (масло) наибольшей эффективностью обладает оптимальное управление, основанное на методе Эйлера – Лагранжа, а если производственный

цикл короткий, то необходимо управление с максимальным приложением управляющих воздействий, ускоряющих или замедляющих производство, то есть основанное на принципе максимума Понтрягина. Предложенная методика различила эти два случая даже при грубой оценке, что и доказывает ее работоспособность.

Заключение

Таким образом, вероятностная модель согласования производственного процесса с региональным рынком позволяет организовать оптимальное управление предприятием. При этом важно, какую цель мы преследуем: максимально быстро удовлетворить рыночную потребность и получить доход от дополнительной продажи продукции либо максимально сэкономить на производственных расходах в переходных моментах. Как показало исследование, решение этого вопроса связано с длительностью производственного цикла.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пищухин А.М. Согласованность составляющих системы и методы ее достижения // Вестник ОГУ. – 1999. – № 1. – С. 87–90.
2. Kolassa S. Evaluating predictive count data distributions in retail sales forecasting // International Journal of Forecasting. – 2016. – Vol. 32. – № 3. – P. 788–803.
3. Merigó J.M., Palacios-Marqués D., Ribeiro-Navarrete B. Aggregation systems for sales forecasting // Journal of Business Research. – 2015. – Vol. 68. – № 11. – P. 2299–2304.
4. Zhi-Ping Fan, Yu-Jie Che, Zhen-Yu Chen. Product sales forecasting using online reviews and historical sales data: A method combining the Bass model and sentiment analysis // Journal of Business Research. – 2017. – Vol. 74. – P. 90–100.
5. Пищухин А.М., Чернов Ф.В. Метод стохастического прогнозирования благоприятных периодов реализации продукции // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 6. – С. 165–169.
6. Лебедева А.Л., Ермилов М.М. Применение теории массового обслуживания в исследовании рынка // Фундаментальные исследования кооперативного сектора экономики. – 2014. – № 4. – С. 35–39.
7. Лыков И.А., Быстрой Г.П. Расширенный многофакторный мультифрактальный метод социально-экономического прогнозирования // Вестник кибернетики. – 2015. – № 2(18). – С. 72–89.
8. Бочков А.П. Эффективность автоматизированных систем управления экономическими объектами // Цифровая экономика и «Индустрия 4.0»: проблемы и перспективы: научно-практическая конференция. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. – С. 628.
9. Kuan Chung-Ming. Markov switching model. Quantile, 2013. – № 11. – pp. 13–39.
10. Соколов Г., Волобуева Е. Марковская модель оптимизации процесса поставки товаров с одношаговой потребительской ценностью // Логистика. – 2012. – № 11. – С. 46–49.
11. Безбородова А. Кредитный бум: марковские модели с переключением режимов // Банковский вестник. – 2015. – № 9. – С. 10–17.
12. Psaradakis Z. On Markov Error Correction Models, with an Application to Stock Prices and Dividends / Z. Psaradakis, M. Sola, F. Spagnolo // Journal of Applied Econometrics. – 2004. – № 19 (1). – P. 6988.
13. Бурмистров А.В., Новиков А.В. Стохастическая кинетическая модель формирования цены // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – № 07(61). – Ч. 3. – С. 107–112.
14. Черток А.В. Моделирование потоков заявок на финансовых рынках с помощью обобщенных процессов риска: Дис. ... канд. ф-м. наук. – М., 2015. – 113 с.
15. Снетков Н.Н. Имитационное моделирование экономических процессов: Учеб.-практ. пособие. – М.: Изд. Центр ЕАОИ, 2008. – 228 с.
16. Волков И.К., Зув С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 448 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
18. Шпилова С.С. Применение следящих систем к решению задач управления запасами // Молодой ученый. – 2015. – № 10. – С. 864–867.
19. Пищухин А.М. Управление предприятием на основе прогноза в ассортиментном пространстве // Экономика региона. – 2017. – Т. 13. – № 1. – С. 216–225. DOI 10.17059/2017-1-20.

20. *Higgins J.M.* Organizational Policy and Strategic Management: Text and Cases. 2nded. – Chicago: The Drydent Press, 1983, 721 p.
21. *Schendel D.E., Hatter K.J.* Business Policy or Strategic Management: A Broader View for an Emerging Discipline. Academy of Management Proceeding. August, 1972, p. 4.
22. *Tesfatsion L., Judd K.L.* Handbook of Computational Economics: Volume 2, Agent-Based Computational Economics. Amsterdam, The Netherlands: Handbook in Economics Series, 2006, p. 829–1660.
23. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I-IV // Автоматика и телемеханика. – 1960, № 4, с. 436–441; № 5, с. 561–568; № 6, с. 661–665; 1961, № 4, с. 425–435.
24. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
25. *Пищухина Т.А.* Методы и средства выбора и оценки эффективности технического оснащения технологических процессов: дис. ... канд. техн. наук. – Краснодар, 2007. – С. 37–39.

Статья поступила в редакцию 18 января 2018 г.

PROBABILISTIC MODEL OF HARMONIZATION OF THE PRODUCTION PROCESS WITH THE REGIONAL MARKET

A.M. Pishchukhin

Orenburg State University
13, Victory avenue, Orenburg, 460018, Russian Federation

Abstract. *The market can be considered the brightest representative of stochastic processes. But the production of products also cannot be considered deterministic. Therefore, when managing an enterprise, it is necessary to strive for the harmonization of two stochastic processes. The model of market behavior and the production process was chosen that obeys the Kolmogorov equation. Then, the question was raised - how to manage production: to accelerate or freeze production volumes smoothly, or to apply the quickest possible braking and accelerating of production, following the classical rule - time is money. Using the Euler-Lagrange method, it is shown that the matching of stochastic processes can be reduced in this formulation to a third-order differential equation from the control action in the event of a smooth change. In the case of stepwise application of control actions, the Pontryagin maximum principle is applied to solve the optimal control problem. On the basis of the virtual work concept of control actions, as the work is performed in a larger volume with the most frequently encountered values of market demand, these two methods of control are given to the possibility of comparing the results obtained. As a result, it is shown that for a product with a long production cycle, optimal control, based on the Euler-Lagrange method, has the greatest efficiency, and if the production cycle is short, then control is needed with maximum application of control actions that accelerate or slow down production on the Pontryagin maximum principle. The technique proposed distinguished these two cases even with a rough estimate, which proves its efficiency.*

Keywords: *follower management, Kolmogorov equation, discontinuous control, virtual operation of control actions, stochastic market process, production stochasticity, agreement of stochastic processes, Letov method, quadratic functional, Euler-Lagrange method.*

REFERENCES

1. *Pishchukhin A.M.* Consistency of the components of the system and the methods for achieving it. Vestnik OGU. – 1999 (no. 1), pages 87–90.
2. *Kolassa S.* Evaluating predictive count data distributions in retail sales forecasting. International Journal of Forecasting. – 2016, vol. 32 (no. 3), pages 788–803.
3. *Merigó J.M., Palacios-Marqués D., Ribeiro-Navarrete B.* Aggregation systems for sales forecasting. Journal of Business Research. – 2015, vol. 68 (no. 11), pages 2299–2304.

A.M. Pishchukhin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.

4. *Zhi-Ping Fan, Yu-Jie Che, Zhen-Yu Chen.* Product sales forecasting using online reviews and historical sales data: A method combining the Bass model and sentiment analysis. *Journal of Business Research.* – 2017, vol. 74, pages 90–100.
5. *Pishchukhin A.M., Chernov F.V.* The method of stochastic forecasting of favorable periods for sales of products. *Fundamental research.* – 2017 (no. 6), pages 165–169.
6. *Lebedeva A.L., Ermilov M.M.* Application of the theory of mass service in the market research. *Fundamental research of the cooperative sector of the economy.* – 2014 (no. 4), pages 35–39.
7. *Lykov I.A., Bystray G.P.* Advanced multifactorial multifractal method of socio-economic forecasting. *Bulletin of Cybernetics.* – 2015 (no. 2 (18)), pages 72–89.
8. *Bochkov A.* Efficiency of automated control systems for economic objects. *Digital economy and "Industry 4.0": problems and perspectives: scientific and practical conference.* – 2017, SPb.: Publishing house Polytechnic. University, page 628.
9. *Kuan Chung-Ming.* Markov switching model. *Quantile.* – 2013 (no. 11), pages 13–39.
10. *Sokolov G., Volobueva E.* Markovskaya model of optimization of the process of supply of goods with a one-step consumer value. *Logistics.* – 2012 (no.11), pages 46–49.
11. *Bezborodova A.* Credit boom: Markov models with switching modes. *Bank Gazette.* – 2015 (no. 9), pages 10–17.
12. *Psaradakis Z., Sola M., Spagnolo F.* On Markov Error Correction Models, with an Application to Stock Prices and Dividends. *Journal of Applied Econometrics.* – 2004 (no. 19 (1)), page 6988.
13. *Burmistrov A.V., Novikov A.V.* Stochastic kinetic model of price formation. *International scientific-research journal.* – 2017 (no. 07 (61)), Part 3, pages 107–112.
14. *Chertok A.V.* Modeling of flows of applications in financial markets with the help of generalized risk processes. *Dis. ... cand. f/m nauk.* – 2015, Moscow, pages 113.
15. *Snetkov N.N.* Simulation of economic processes. *Uch. practical guide.* – 2008. – M.: Izd. The EAOI Center, pages 228.
16. *Volkov I.K., Zuev S.M., Tsvetkova G.M.* Random processes. – 2006, Publishing house of the MSTU, N.E. Bauman, pages 448.
17. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* *Equations of Mathematical Physics.* – 1977. – M.: Nauka, pages 736.
18. *Shipilova S.S.* The application of tracking systems to the solution of problems of inventory management. *Young scientist.* – 2015 (no. 10), pages 864–867.
19. *Pishukhin A.M.* Enterprise management based on the forecast in the assortment space. *Economy of the region.* – 2017, vol. 13 (no. 1), pages 216–225. DOI 10.17059/2017-1-20.
20. *Higgins J.M.* *Organizational Policy and Strategic Management: Text and Cases.* 2nded. – 1983, Chicago: The Drydent Press, 721 p.
21. *Schendel D.E., Hatter K.J.* *Business Policy or Strategic Management: A Broader View for an Emerging Discipline.* – 1972, Academy of Management Proceeding, August, pages 4.
22. *Tesfatsion L., Judd K.L.* *Handbook of Computational Economics: 2006, Volume 2, Agent-Based Computational Economics.* Amsterdam, The Netherlands: Handbook in Economics Series, pages 829–1660.
23. *Letov A.M.* Analytical design of regulators I–IV. *Automation and telemechanics.* – 1960 (no. 4), pages 436–441; (no. 5), pages 561–568; (no. 6), pages 661–665; 1961, (no. 4), pages 425–435.
24. *Alexandrov A.G.* *Optimal and adaptive systems.* – 1989, M.: High. Sc., pages 263.
25. *Pischukhina T.A.* Methods and means of selecting and evaluating the effectiveness of technical equipment of technological processes: dis. ... cand. tech. sciences. – 2007, Krasnodar, pages 37–39.

УДК 621.391.1: 621.395

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИПЕРЭРЛАНГОВСКИХ ВХОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Када Отхмане

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
Россия, 443010, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23

E-mail: veniamin_tarasov@mail.ru, elyamalusha@mail.ru, otman2333@gmail.com

Аннотация. Предложено использовать в качестве входных распределений для описания систем массового обслуживания два закона распределения достаточно общего вида: гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский с широким диапазоном изменения коэффициентов вариаций. Выявлена главная характерная черта этих законов распределений, заключающаяся в том, что они однозначно могут описываться как двумя первыми моментами, так и тремя. Предложен механизм их аппроксимации с использованием известного метода моментов как с использованием двух первых моментов, так и с использованием трех первых моментов. Использование этих законов распределений в теории массового обслуживания расширяет и дополняет известную незавершенную формулу для среднего времени ожидания для систем массового обслуживания при произвольных законах распределения интервалов входного потока требований и времени обслуживания. Полученные результаты важны для современной теории телетрафика.

Ключевые слова: гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский законы распределения, системы массового обслуживания.

Введение

Для моделирования трафика современных сетей телекоммуникаций широко используются законы распределений, такие как закон Эрланга, экспоненциальный, гиперэкспоненциальный, гиперэрланговский и др., для которых коэффициенты вариации случайных величин больше или равны 1 ($c \geq 1$) или же меньше 1 ($c < 1$). Коэффициент вариации, больший 1, свидетельствует о том, что вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем у классического экспоненциального распределения, а «хвост» распределения весомее. Для коэффициента вариации, меньшего 1, будет наоборот.

Как известно, например, из [1, 3], для системы массового обслуживания (СМО) с произвольными законами распределений для входного потока и времени обслуживания $G/G/1$ среднее время ожидания в очереди определяется выражением

Тарасов Вениамин Николаевич (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой «Программное обеспечение и управление в технических системах».
Ахметшина Элеонора Газинуровна, аспирантка.
Када Отхмане, аспирант.

$$\bar{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1-\rho)^2 / \lambda^2}{2(1-\rho) / \lambda} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}, \quad (1)$$

где ρ – коэффициент загрузки системы, $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$;

λ – интенсивность входного потока;

μ – интенсивность обслуживания;

D_λ, D_μ – соответственно дисперсии интервалов поступления и времени обслуживания;

\bar{I}, \bar{I}^2 – соответственно среднее значение и второй начальный момент периода простоя.

Следовательно, первое слагаемое в правой части (1) зависит от двух первых моментов распределения интервалов входного потока и времени обслуживания. Второе слагаемое в правой части (1) для общего случая системы G/G/1 остается неизвестным, и поэтому выражение (1) является до сих пор незавершенной формулой. Вполне вероятно, что второе слагаемое может зависеть от моментов интервалов поступления и времени обслуживания более высокого порядка, чем первые два. Поэтому при анализе СМО G/G/1 необходимо учитывать не только первые два момента случайных интервалов времен поступления и обслуживания, но и моменты более высокого порядка.

Постановка задачи

Из формулы (1) для среднего времени ожидания требований в системе G/G/1 следует, что главная характеристика СМО – среднее время ожидания требований в очереди – связано с коэффициентами вариаций интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, и таким образом «хвост» распределения, используемого для описания СМО, обусловленный величиной коэффициента вариации c , влияет напрямую на среднее время ожидания. Степень такого влияния и выясним на примере двух законов распределений достаточно общего вида, в качестве которых рассмотрим гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский законы.

Решение задачи

Рассмотрим вначале гиперэкспоненциальный закон распределения. Распределение с плотностью $f(t) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$, где $t \geq 0$, $\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$, называют гиперэкспоненциальным (гиперпоказательным) порядка R и обозначают H_R [1]. В этой же работе доказано, что коэффициент вариации случайной величины, распределенной по такому закону, больше либо равен единице. Аналогичное определение H_R , только относительно функции распределения, дано в работе [2]. В теории массового обслуживания это распределение выше второго порядка не используется, т. к. в этом случае затруднительно получить решение для среднего времени ожидания.

Гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка H_2 как вероятностная смесь экспоненциальных распределений с функцией плотности

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (2)$$

содержит три параметра ($0 < p < 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$) и таким образом позволяет аппроксими-

мировать произвольные входные распределения методом моментов на уровне трех первых моментов. Кроме того, закон распределения H_2 обладает уникальным свойством, заключающимся в том, что он полностью может описываться как с использованием двух первых моментов, так и с использованием трех первых моментов [3, 4].

На рис. 1 показаны графики функции плотности (2) с математическим ожиданием, равным 2, для случаев $c=2$ и $c=4$, а также для сравнения показана плотность экспоненциального распределения с тем же математическим ожиданием. Параметры распределения (2) при $c=2$: $p=0,8873$; $\lambda_1=0,8873$; $\lambda_2=0,1127$, а при $c=4$ – $p=0,9697$; $\lambda_1=0,9697$; $\lambda_2=0,0303$.

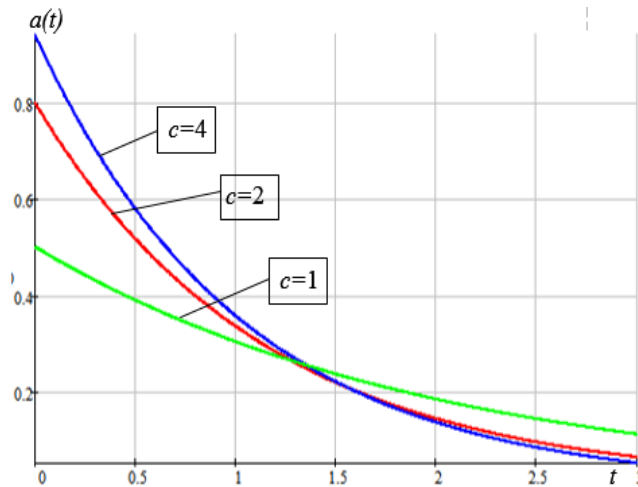


Рис. 1. Графики функции плотности (2) при $c=2$ и $c=4$

Более полное представление о гиперэкспоненциальном распределении дает его «хвост», график которого приведен на рис. 2.

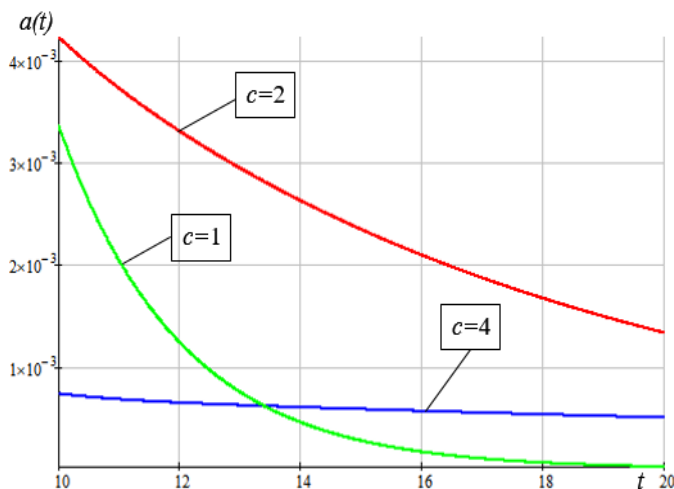


Рис. 2. «Хвост» гиперэкспоненциального распределения

Из рис. 2 видно, что кривая плотности при $c=4$ имеет т. н. «тяжелый хвост», которому характерно малое изменение во времени. Для такого случая вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем для экспоненциального закона [5]. Поэтому исходя из выражения (1) делаем вывод: входное распределение (2) в СМО при $c=4$ дает большее время ожидания, чем при $c=2$ и тем более чем при $c=1$ для экспоненциального закона.

Аппроксимация законов распределений с использованием двух первых моментов

Преобразование Лапласа функции (2) имеет вид

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \quad (3)$$

Воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (2):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad (4)$$

$$\overline{\tau_\lambda^2} = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}. \quad (5)$$

Рассматривая равенства (4) и (5) как запись известного метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (2) λ_1, λ_2, p . Система двух уравнений (4), (5) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации

$$c^2 = \frac{\overline{\tau_\lambda^2} - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} \quad (6)$$

как связующее условие между (4) и (5). Исходя из вида уравнения (4) положим

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda \quad (7)$$

и потребуем выполнения условия (6). Подставив выражения (4), (5) с параметрами (7) в (6) и решив квадратное уравнение относительно параметра p ,

получим для него два значения: $p = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{\frac{c_\lambda^2 - 1}{c_\lambda^2 + 1}})$. При этом можно

воспользоваться любым из них [3, 4]. Подставив полученное значение p в (7), определим недостающие параметры λ_1, λ_2 . Таким образом, методом подбора можно получить решение недоопределенной системы уравнений (4) и (5). Следовательно, гиперэкспоненциальный закон распределения может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации – от 1 до ∞ [4, 5].

Аппроксимация с использованием трех моментов

Учитывая тот факт, что распределение H_2 является трехпараметрическим, аппроксимацию можно выполнить и на уровне трех первых моментов, что позволит сравнить полученные результаты. Для этого запишем выражение для момента 3-го порядка, полученное через преобразование Лапласа (3):

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} \quad (8)$$

Решив систему нелинейных уравнений (4), (5) и (8) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (2) λ_1, λ_2, p .

Однако эта система уравнений будет не всегда разрешимой. Для существования решения системы (4), (5) и (8) необходимо и достаточно выполнение условия [7, 8]

$$\overline{\tau_\lambda^3} \cdot \overline{\tau_\lambda} \geq 1,5 \cdot \overline{\tau_\lambda^2} \quad (9)$$

Решив систему нелинейных уравнений (4), (5) и (8) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (2) λ_1, λ_2, p .

Рассмотрим пример. Предположим, что первые два начальных момента распределения (2) равны: $\overline{\tau_\lambda} = 10/9$, $\overline{\tau_\lambda^2} = 17 \cdot (10/9)^2$, что соответствует коэффициенту вариации $c = 4$ согласно равенству (6). Теперь к первым двум моментам добавим третий: $\overline{\tau_\lambda^3} = 497 \cdot (10/9)^3$, что соответствует коэффициенту асимметрии $A_s = 7$ [7]. Заметим, что для классического экспоненциального распределения $c = 1$, $A_s = 2$.

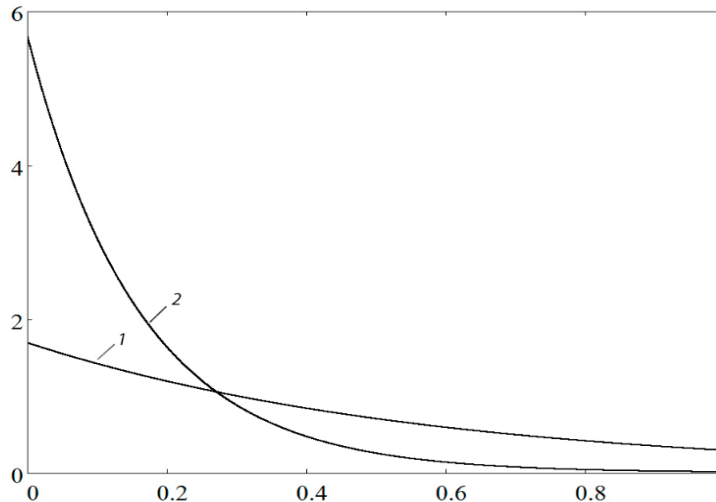


Рис. 3. Графики функции плотности (2): 1 – аппроксимация закона распределения H_2 на уровне 2-х моментов; 2 – на уровне 3-х моментов

Аппроксимация с использованием двух первых моментов дает $p \approx 0,9697$, $\lambda_1 \approx 1,7454$, $\lambda_2 \approx 0,0546$. График функции плотности (2) с этими параметрами приведен на рис. 3 (кривая 1). Для аппроксимации с использованием трех первых моментов решаем систему трех уравнений в пакете Mathcad:

$$\begin{cases} \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} = 10/9 \\ \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} = 17 \cdot (10/9)^2 \\ \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} = 497 \cdot (10/9)^3, \end{cases}$$

что дает следующие результаты для параметров: $p \approx 0,9111$, $\lambda_1 \approx 6,2291$, $\lambda_2 \approx 0,0922$. Условие (9) в этом случае выполняется. График функции плотности (2) с этими параметрами приведен на рис. 3 (кривая 2).

Рис. 3 наглядно демонстрирует разницу между аппроксимацией с использованием двух первых моментов и с использованием трех моментов. Как показано в работах [4, 10, 13], аппроксимация закона распределения (2) с использованием двух первых моментов может занижать среднее время ожидания в очереди в СМО до 10 % по сравнению с аппроксимацией на уровне трех моментов.

Гиперэрланговский закон распределения

Распределение с плотностью $f(t) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \frac{k_i \lambda_i (k_i \lambda_i t)^{k_i - 1}}{(k_i - 1)!} e^{-k_i \lambda_i t}$, где $t \geq 0$,

$\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$, называют гиперэрланговским порядка R и обозначают HE_R [1]. Гиперэр-

ланговское распределение представляет собой вероятностную смесь нормированных распределений Эрланга порядка k с функцией плотности вида

$$f_k(t) = \frac{k \lambda (k \lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k \lambda t} \text{ и является наиболее общим распределением неотрица-}$$

тельных непрерывных случайных величин, поскольку имеет коэффициент вариации c_τ в интервале от 0 до ∞ [5, 6].

По той же причине, что и выше, мы ограничимся гиперэрланговским распределением 2-го порядка при $k_i = 2$ с функцией плотности

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 t e^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 t e^{-2\lambda_2 t}. \quad (10)$$

Как будет показано ниже, коэффициент вариации для такого распределения $c_\tau \geq 1/\sqrt{2}$. Распределение (10) в научной литературе обозначают через HE_2 . Оно содержит три параметра ($0 < p < 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$) и таким образом позволяет аппроксимировать произвольные входные распределения на уровне трех первых моментов с использованием известного метода моментов. Приведенные выше выкладки для распределения H_2 подтверждают тот факт, что распределение HE_2 , как и гиперэкспоненциальное H_2 , однозначно может определяться как двумя, так и тремя первыми моментами. В этом случае начальные моменты до третьего порядка включительно для распределения (10) имеют вид

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad \bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2} \left[\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right], \quad \bar{\tau}_\lambda^3 = \frac{3p}{\lambda_1^3} + \frac{3(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (11)$$

При аппроксимации с использованием двух первых моментов поступаем точно так же, как и в случае с распределением (2), и получим для параметра p

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2)-3}{8(1+c_\lambda^2)}}.$$

Дальнейшие действия по определению параметров λ_1, λ_2 уже очевидны. Точно так же при аппроксимации с использованием трех первых моментов, решив систему уравнений (11) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (10) λ_1, λ_2, p .

На рис. 4 представлены графики функции плотности (10) с математическим ожиданием, равным 2, для случаев $c=0,71$, $c=2$ и $c=4$, а также для сравнения показана плотность экспоненциального распределения с тем же математическим ожиданием.

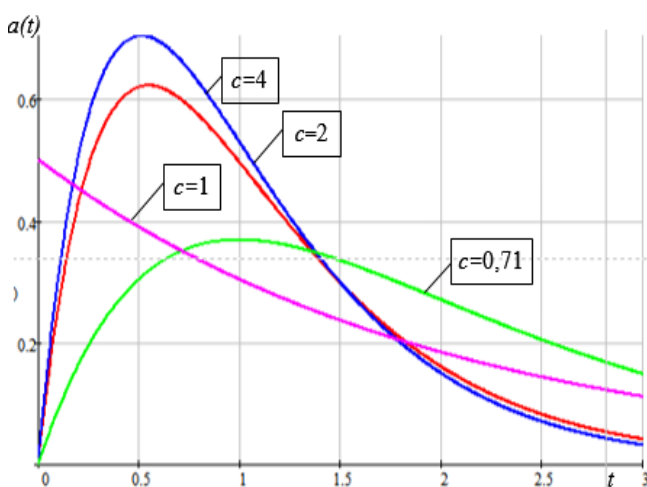


Рис. 4. Графики функции плотности (10) при $c=0,71$, $c=2$ и $c=4$

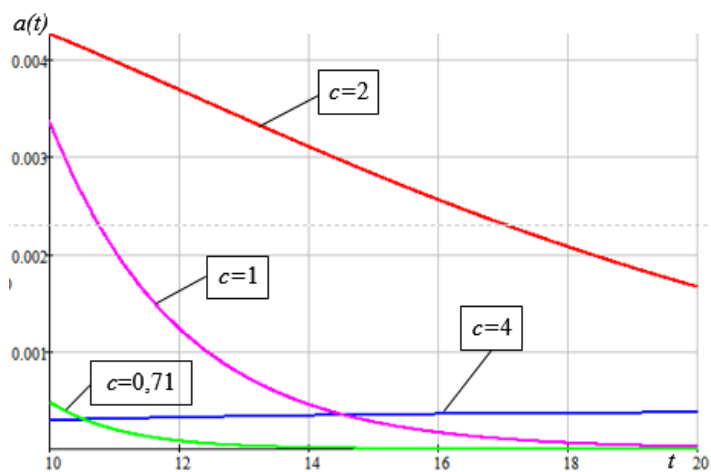


Рис. 5. «Хвост» гиперэрланговского распределения

Более полное представление о гиперэрланговском распределении также дает его «хвост», график которого приведен на рис. 5. Из рис. 5 также видно, что кривая плотности при $c = 4$ имеет т. н. «тяжелый хвост», которому характерно малое изменение во времени. Следовательно, и для коэффициентов вариаций выше 4 эта тенденция будет сохраняться и будет резко возрастать среднее время ожидания требований в системе. Аналогично будет и для гиперэкспоненциального закона распределения, рассмотренного выше.

Данный факт проверим на основе вычислительного эксперимента для систем массового обслуживания $H_2/H_2/1$ и $HE_2/HE_2/1$, для которых решения для среднего времени ожидания в замкнутой форме с полным выводом и анализом представлены в работах [4] и [11] соответственно.

В таблице приведены данные расчетов среднего времени ожидания (в единицах времени) для систем $H_2/H_2/1$ и $HE_2/HE_2/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ с учетом того, что диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов входного потока c_λ и времени обслуживания c_μ для распределения HE_2 шире, чем у распределения H_2 . Коэффициент загрузки в расчетах определяется отношением средних интервалов времени обслуживания и интервалов между требованиями $\rho = \bar{c}_\mu / \bar{c}_\lambda$. Расчеты проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{c}_\mu = 1$. С учетом того факта, что система $H_2/H_2/1$ неприменима в случаях $c_\lambda < 1$ и $c_\mu < 1$, в таблице поставлен прочерк.

Результаты для времени ожидания при коэффициентах вариаций, больших и меньших 1

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	(c_λ, c_μ)	для системы $H_2/H_2/1$	для системы $HE_2/HE_2/1$
0,1	(0,71; 0,71)	–	0,02
	(2,2)	0,45	0,34
	(4,4)	1,78	1,68
	(8,8)	7,11	7,16
0,5	(0,71; 0,71)	–	0,40
	(2,2)	4,04	3,98
	(4,4)	16,13	16,53
	(8,8)	64,18	66,73
0,9	(0,71; 0,71)	–	4,40
	(2,2)	36,20	36,21
	(4,4)	144,83	145,31
	(8,8)	577,86	580,56

Данные таблицы хорошо согласуются с результатами [12], что также подтверждает адекватность полученных результатов. Полученные результаты полностью подтверждают наши предположения о среднем времени ожидания в очереди, выдвинутые выше.

Выводы

1. Выявлена характерная особенность у двух законов распределений достаточно общего вида: гиперэкспоненциального и гиперэрланговского, заключающаяся в том, что они однозначно описываются как двумя первыми моментами, так и тремя первыми моментами.

2. Представлен механизм их аппроксимации на практике с использованием известного метода моментов как с использованием двух, так и с использованием трех первых моментов.

3. Применение этих законов распределений в теории массового обслуживания расширяет диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов входного потока и времени обслуживания, а также дополняет и расширяет формулу (1) для среднего времени ожидания в системе G/G/1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания: Пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
3. *Brannstrom N.* A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. – Applied to HS-DSSS. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
4. *Тарасов В.Н.* Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. – 2016. – Т. 52. – № 1. – С. 16–26.
5. *Алиев Т.И.* Основы моделирования дискретных систем. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
6. *Алиев Т.И.* Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С. 88–93.
7. *Whitt W.* Approximating a point process by a renewal process, I: two basic methods // Operation Research. – 1982. – Vol. 32, no. 1. – P. 125–147.
8. *Myskja A.* An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
9. *Jennings O.B. & Pender J.* Comparisons of ticket and standard queues. Queueing Systems, 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145–202.
10. *Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А., Малахов С.В.* Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов // Информационные технологии. – 2014. – № 9. – С. 54–59.
11. *Тарасов В.Н.* Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2018. – № 4. – С. 61–70.
12. *Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф.* Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. – 2009. – № 7. – С. 2–8.
13. *Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А.* Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания H₂/M/1 // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – Т. 12. – № 3. – С. 36–41.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2018 г.

FEATURES OF APPLICATION OF HYPEREXPONENTIAL AND HYPERERLANGIAN INPUT DISTRIBUTIONS IN QUEUEING SYSTEMS

V.N. Tarasov, E.G. Akhmetshina, Kada Othmane

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstogo st., Samara, 443010, Russian Federation

E-mail: veniamin_tarasov@mail.ru, elyamalusha@mail.ru, otman2333@gmail.com

Abstract. *It has been proposed to use two distribution laws of a fairly general form as input distributions for describing queueing systems: hyperexponential and hypererlangian with a wide range of variation coefficients. The main characteristic feature of these laws of distributions is revealed, showing that they can unambiguously be described both by the first two moments and by three moments. The mechanism for their approximation is proposed using the well-known method of moments using both the first two moments and the first three moments. The use of these laws of distributions in the queueing theory extends and complements the well-known incomplete formula for the average waiting time for queueing systems with arbitrary laws of intervals distribution of input requirements and service time. The results obtained are important for modern teletraffic theory.*

Keywords: *hyperexponential and hypererlangian distribution laws, queueing systems.*

REFERENCES

1. Kleinrock L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queueing theory]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ, 1979. 432 pp. (In Russian).
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queueing theory]. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995. 529 pp. (In Russian).
3. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology. 2004. 79 pp.
4. Tarasov V.N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions // Problemy peredachi informacii, 2016. no. 1 (55). Pp. 14–23. (In Russian).
5. Aliev T.I. Osnovy modelirovaniya diskretnykh system [Fundamentals of discrete systems modeling] SPb, SPbGU ITMO, 2009. 363 pp. (In Russian).
6. Алуев Т.И. Approximation of probability distributions in queueing models // Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnykh tekhnologij, mekhaniki i optiki, 2013. no. 2(84). Pp. 88–93. (In Russian).
7. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research, 1982. no. 1(30). Pp. 125–147.
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991. Pp. 683–688.
9. Jennings O.B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems, 2016. no. 1 (84). Pp. 145–202.
10. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Gorelov G.A., Malakhov S.V. Analyzing the Incoming Traffic at the Three Moments Distribution of Time Intervals // Informacionnye tekhnologii, 2014. no. 9. Pp. 54–59. (In Russian).
11. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hypererlangian input distributions // Radioelektronika, informatika, upravlenie, 2018. no. 4. Pp. 61–70. (In Russian).

Veniamin N. Tarasov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Eleonora G. Akhmetshina, graduate student.
Kada Othmane, graduate student.

12. *Tarasov V.N., Bahareva N.F.* A generalized two-dimensional diffusion queueing model of the GI/G/1 type // *Telekommunikacii*, 2009. no. 7. Pp. 2–8. (In Russian).
13. *Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Gorelov G.A.* Mathematical model of traffic with heavy-tailed distributions based queueing $H_2/M/1$ // *Infokommunikacionnye technologii*, 2014. no. 3. Pp. 36–41. (In Russian).
14. *Tarasov V.N.* Extension of the Class of Queueing Systems with Delay // *Avtomatika i telemekhanika*, 2018. Vol. 79, no. 12, pp. 2147-2158.
15. *Gromoll H.C., Terwilliger B. & Zwart B.* Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018. Vol. 89, no. 3, pp. 213-241.
16. *Legros B.* M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018. Vol. 89, no. 3, pp. 269-301.
17. *Jennings O.B. & Pender J.* Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016. Vol. 84, no. 1, pp. 145-202.