

## Энергетика

УДК 536.2 (075)

### ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

*Л.С. Абишева*

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

*Проведены экспериментальные и теоретические исследования сложного теплообмена в газовой прослойке, которые позволили выполнить анализ процесса передачи теплоты, определить вклад каждой составляющей теплообмена (конвективного теплообмена и излучения), найти эквивалентный коэффициент теплопроводности вертикальной цилиндрической воздушной прослойки на различных режимах работы лабораторной установки в широком диапазоне температур (от 0 до 3000 °С). Результаты исследования будут полезны при моделировании теплообменных процессов в газовых прослойках, при выборе оптимальной (энергоэффективной) толщины прослойки, материала стенок, состава среды и т. д.*

**Ключевые слова:** *сложный теплообмен, энергосберегающие газовые прослойки, излучение, система нелинейных уравнений, конвективный теплообмен, эквивалентный коэффициент теплопроводности газовой прослойки, графоаналитический метод.*

Исследование сложного теплообмена в газовых прослойках многослойных конструкций рассмотрено в [3]–[5]. В настоящей работе представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований сложного теплообмена в газовой прослойке, которые позволили провести анализ процесса передачи теплоты, определить вклад каждой составляющей теплообмена (конвективного теплообмена и излучения), найти эквивалентные коэффициенты теплопроводности газовой прослойки в широком диапазоне температур с учетом всех частных особенностей этого процесса.

Передача теплоты излучением происходит посредством электромагнитных колебаний. В зависимости от длины волны различают следующие виды излучения: космическое, гамма-излучение, рентгеновское, ультрафиолетовое, видимое (световое), тепловое (инфракрасное), радиоволны. К излучениям, возникновение и распространение которых определяется только температурой излучающего тела и его оптическими свойствами, относятся лишь световое и инфракрасное. Фи-

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (код проекта: 1273).*

*Любовь Сергеевна Абишева, ассистент «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».*

зическая природа их одна и та же – различие лишь в длине волны. В связи с этим процесс их распространения объединяется под одним общим понятием – тепловое излучение.

Количество теплоты, передаваемое путем излучения, становится соизмеримым с конвективными и молекулярными тепловыми потоками лишь при высоких температурах. При очень высоких температурах (камеры сгорания авиационных и ракетных двигателей, плазменные установки и др.) теплообмен излучением может значительно превосходить любые другие виды теплообмена. Поэтому проблема расчета конструкций, работающих при таких температурах, приобретает особую актуальность. Однако сложность решения краевых задач лучистого теплообмена связана с его нелинейностью. Так, тепловой поток, передаваемый от более нагретой стенки цилиндрической воздушной прослойки к менее нагретой, определяется по формуле

$$q = \varepsilon_{np} c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (1)$$

где  $q$  – тепловой поток, Вт/м<sup>2</sup>;

$c_0 = 5,67$  Вт/м<sup>2</sup> К<sup>4</sup> – коэффициент излучения абсолютно черного тела;

$T_1, T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) – температуры стенок, К;

$\varepsilon_{np}$  – приведенная степень черноты для замкнутых пространств, определяемая по формуле

$$\varepsilon_{np} = 1 / \left( 1 / \varepsilon_1 + F_1 / F_2 (1 / \varepsilon_2 - 1) \right). \quad (2)$$

В соотношении (2)  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – степени черноты поверхности стенок, через которые происходит передача теплоты путем лучистого теплообмена;  $F_1$  и  $F_2$  – площади меньшей и большей стенок, между которыми находится воздушная прослойка.

Таким образом, нелинейная (степенная) зависимость теплового потока от температуры существенно усложняет расчеты температурного состояния тел, участвующих в лучистом теплообмене.

Приведенные выше теоретические положения и формулы будут использованы далее при определении температурного состояния конструкций и лучистой составляющей коэффициента теплопроводности.

Схема установки, предназначенной для исследования процесса сложного теплообмена в газовых прослойках, представлена на рис. 1.

Корпус установки состоит из внешней 1 и внутренней 2 металлических стенок, разделенных слоем изоляции 3 из минеральной ваты толщиной 3,5 см. Кронштейны 4 скрепляют внешнюю и внутреннюю поверхности стенок корпуса установки. С целью уменьшения тепловых перетоков они выполнены из керамики. Внутри корпуса расположена керамическая труба 5 с электрической спиралью 6, обеспечивающая нагрев трубы до необходимой температуры. Мощность электрической спирали регулируется лабораторным автотрансформатором (ЛАТР 25), максимальная мощность спирали 2000 Вт. Наружная поверхность керамической трубы 5 покрыта слоем асбестовой изоляции 7 толщиной около 1 см. Подвод электропитания к спирали выполнен через медные коллекторы 8,

соединенные электрическими проводами 20 с ЛАТРОм 25. Хомуты 9 с помощью винтов 10 прикрепляют керамическую трубу 5 к внутренней поверхности 2 корпуса установки. Для измерения температуры керамической трубы используется хромель-алюмелевая термопара 11, соединенная с потенциометром 26. Сверху установка прикрывается фланцем 12 с асбестовой изоляцией 13. Крышка 12 имеет окна для пропуска охлаждающего воздуха, степень закрытия которых регулируется заслонкой 14, имеющей изоляционную прокладку 15. Снизу печь прикрывается фланцем 17, имеющим тепловую изоляцию (асбест) 18. Отверстия 19 в верхнем 12 и нижнем 17 фланцах служат для охлаждения установки. Охлаждающий воздух 24 нагнетается в печь с помощью вентилятора 22, имеющего регулируемый расход.

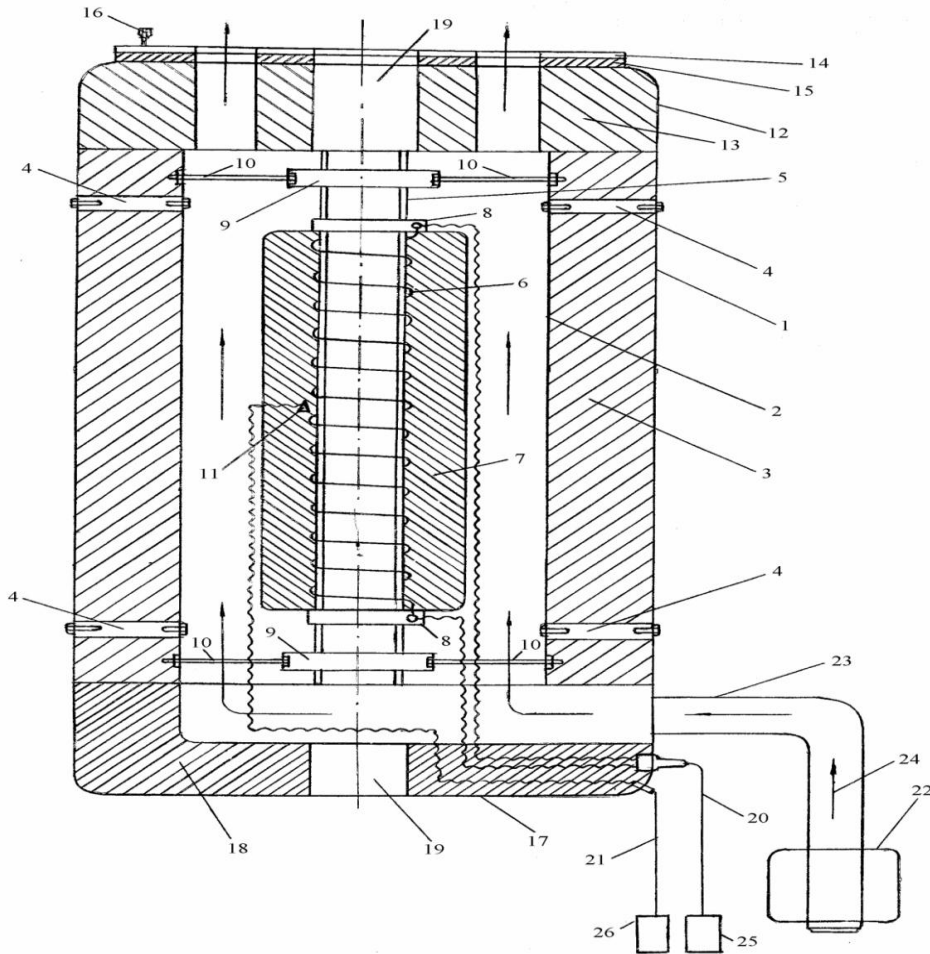


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Тепловой расчет конструкции выполняется для оценки ее основных характеристик – температурного состояния и тепловых потерь через ограждения.

Расчетная схема теплообмена приведена на рис. 2. Тепловой поток от керамической трубы 1 с температурой  $t_1$  проходит через слой асбестовой изоляции 2. В результате температура на внешней поверхности этого слоя в стацио-

нарном режиме устанавливается на некотором уровне  $t_2$ . Далее тепловой поток передается излучением, конвекцией и теплопроводностью (сложный теплообмен) через воздушную прослойку 3 от внешней поверхности слоя асбестовой изоляции 2 к внутренней поверхности металлической стенки слоя изоляции из минеральной ваты 3. Через слой изоляции из минеральной ваты теплота передается теплопроводностью. С внешней поверхности металлической стенки 4 тепло отводится в окружающий воздух путем конвективного теплообмена (теплоотдачи).

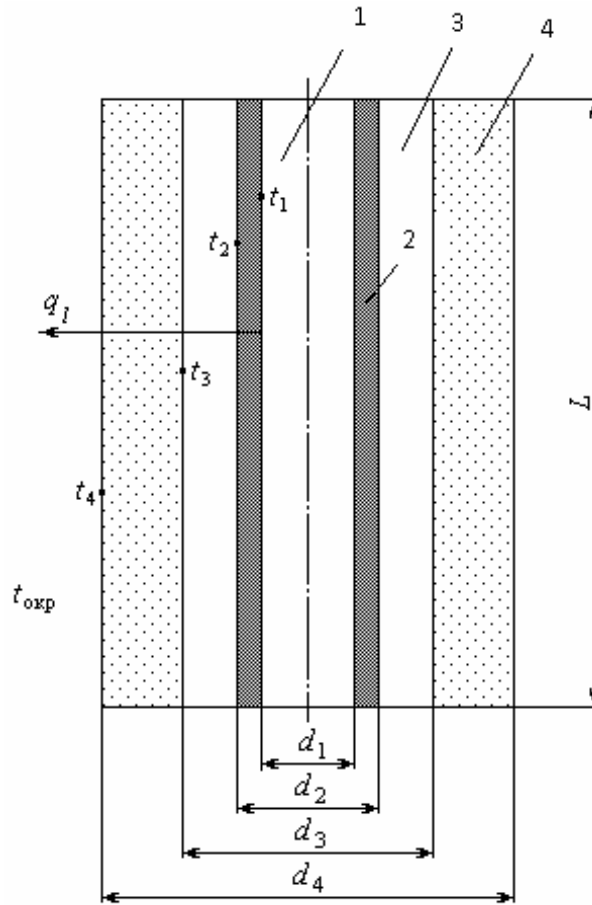


Рис. 2. Расчетная схема теплообмена:

- 1 – керамическая труба; 2 – слой асбестовой изоляции; 3 – воздушная прослойка;
- 4 – слой внешней изоляции (минеральная вата)

В соответствии с описанной схемой теплообмена расчетная методика основывается на следующих уравнениях, записанных для линейной плотности теплового потока.

Уравнение переноса тепла теплопроводностью через цилиндрический слой внутренней асбестовой изоляции:

$$q = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}}, \text{ Вт/м.} \quad (3)$$

Уравнение сложного теплообмена в воздушной прослойке:

$$q_2 = 5,67\varepsilon_{np} \left[ \left( \frac{t_2 + 273}{100} \right)^4 - \left( \frac{t_3 + 273}{100} \right)^4 \right] \pi d_2 + \frac{2\pi\varepsilon_k \lambda_\theta}{\ln(d_3/d_2)} (t_3 - t_2), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_k = \lambda_{\text{экв}}/\lambda_\theta$  – коэффициент конвекции;

$\lambda_\theta$  – коэффициент теплопроводности воздуха.

Для определения коэффициента конвекции необходимо воспользоваться формулой, впервые предложенной академиком М.А. Михеевым по результатам обобщения опытных данных для цилиндрических газовых прослоек [1]:

$$\varepsilon_k = 0,18(Gr_\theta Pr_\theta)^{0,25}.$$

Критерий Грасгофа определялся по формуле

$$Gr_\theta = g\beta\delta^3(t_2 - t_3)/\nu_\theta^2,$$

где  $\beta$  – коэффициент температурного расширения воздуха (рассчитывался по среднеарифметической температуре двух стенок  $(t_2 + t_3)/2$ ),  $1/^\circ\text{C}$ ;  $\delta$  – толщина воздушной прослойки, м;  $\nu_\theta$  – кинематическая вязкость воздуха,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Уравнение передачи тепла теплопроводностью через цилиндрический слой внешней изоляции:

$$q = \frac{\pi(t_3 - t_4)}{\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_4}{d_3}}, \text{ Вт/м.} \quad (5)$$

Уравнение конвективного теплообмена (теплоотдачи) от поверхности наружной стенки корпуса к окружающему воздуху

$$q = \alpha(t_4 - t_{\text{окр}})\pi d_4, \text{ Вт/м.} \quad (6)$$

В стационарном режиме плотность теплового потока одинакова на всех этапах теплообмена, следовательно, во всех четырех уравнениях величина  $q$  имеет одно и то же значение.

Термическими сопротивлениями металлических стенок 1 и 2 (см. рис. 2) внешнего слоя изоляции ввиду их малости пренебрегаем. Тепловой поток в радиальном направлении принимается одномерным, что справедливо лишь для центральной части установки ввиду того, что ее высота ( $L = 1 \text{ м}$ ) значительно превышает диаметр ( $d_4 = 0,2 \text{ м}$ ).

Поскольку число неизвестных ( $q$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  и  $t_4$ ) равно четырем, то система уравнений (3) – (6) является замкнутой и из нее все неизвестные формально могут быть найдены. Однако вследствие нелинейности уравнения (4) решение системы принципиально усложняется, поэтому в данном случае она решалась графоаналитическим методом. Суть его сводится к следующему.

Объединяя уравнения (5) и (6), исключаем одну из неизвестных величин ( $t_4$ ) и получаем вместо двух одно уравнение:

$$q = \frac{\pi(t_3 - t_{\text{окр}})}{\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_4}{d_3} + \frac{1}{\alpha d_4}}, \text{ Вт/м.} \quad (7)$$

По уравнениям (1) и (7) строим графики функций соответственно  $q = f_1(t_2)$  и  $q = f_2(t_3)$ , полагая величины  $t_1$  и  $t_{\text{окр}}$  заданными (рис. 3). Поскольку обе функции линейные, для их построения достаточно задать по два значения аргумента ( $t_2$  и  $t_3$  соответственно). Произвольно выбираем несколько значений плотности теплового потока  $q_1, q_2, q_3$  и т. д. и для каждого из них находим соответствующую пару величин ( $t_{2-1}$  и  $t_{3-1}$  – для  $q_1, t_{2-2}$  и  $t_{3-2}$  – для  $q_2$  и т. д.), как показано на рисунке.

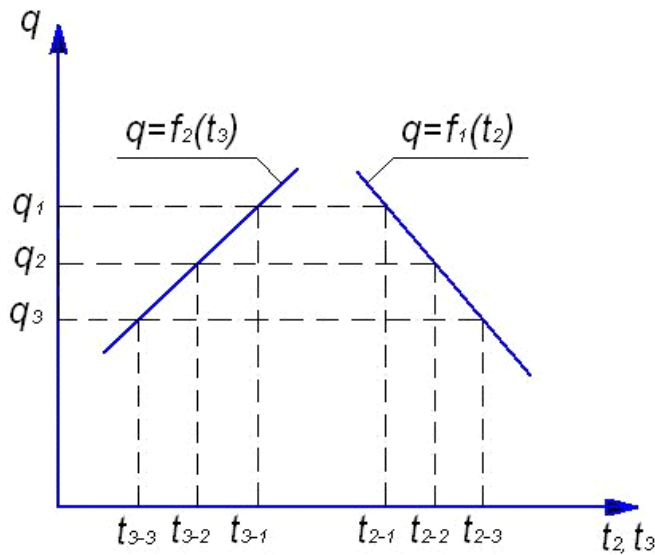


Рис. 3. К графоаналитическому методу расчета

Для каждой пары найденных значений  $t_2$  и  $t_3$  вычисляем по формуле (2) линейную плотность теплового потока, обозначая результаты расчетов как  $q_{1л}$ ,  $q_{2л}$  и т. д. Таким образом, каждому значению  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), выбранному на графике (см. рис. 3), ставится в соответствие некоторое расчетное значение линейного теплового потока  $q_{iл}$ .

По этим данным строим график зависимости  $q_{л} = f(q)$  (рис. 4). Точка пересечения полученного графика с линией  $q_{л} = q$  определяет искомое (расчетное) значение плотности теплового потока  $q_{\text{расч}}$ , по которому с использованием формул (3), (5), (6) находятся расчетные значения  $t_2, t_3$  и  $t_4$ .

Результаты расчетов искомых величин  $q, t_2, t_3, t_4$  представлены в таблице. Определены линейные плотности теплового потока, передающегося излучением (первое слагаемое в уравнении (4)) и посредством конвективного теплообмена (второе слагаемое из (4)). Эквивалентный коэффициент теплопроводности нахо-

дился из формулы, в которой цилиндрическая воздушная прослойка рассматривается как твердое тело:

$$\lambda_{\text{экв}} = \frac{q \ln \frac{d_3}{d_2}}{2\pi(t_2 - t_3)}, \text{ Вт/м К.} \quad (8)$$

Результаты расчетов искомых величин  $q$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$

Линейная плотность теплового потока, $q$ Вт/м	Линейная плотность теплового потока, передающегося излучением $q_{\text{л}}$ , % от $q$	Линейная плотность теплового потока, передающегося конвекцией $q_{\text{к}}$ , % от $q$	Температура, °С				Эквивалентный коэффициент теплопроводности воздушной прослойки, $\lambda_{\text{экв}}$ , Вт/м К
			$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	
11,27	50,0	50,0	50	45,5	37,8	21,4	0,082
77,1	68,6	31,4	200	169,2	141,8	29,5	0,158
175,6	84,5	15,5	400	329,8	297,5	41,4	0,305
279,8	93,1	6,9	600	488,1	462	53,7	0,601
383,4	96,4	3,6	800	646,6	625,7	65,4	1,028
486,5	97,8	2,2	1000	805,3	789	76,8	1,673
589,9	98,9	1,1	1200	964	951,9	87,9	2,733
692	99,2	0,8	1400	1123,2	1113,2	98,5	3,879
793,5	99,4	0,6	1600	1282,6	1273,5	108,7	4,888
895,45	99,6	0,4	1800	1441,8	1434,6	118,7	6,971
996,74	99,7	0,3	2000	1601,3	1595	128,3	8,869
1098,2	99,8	0,2	2200	1760,7	1754,9	137,7	10,614
1199,7	99,85	0,15	2400	1920,2	1915,2	146,8	13,45
1301,05	99,88	0,12	2600	2079,6	2075,3	155,6	16,961
1402,3	99,9	0,1	2800	2239,1	2235,3	164,2	20,687
1503,5	99,92	0,08	3000	2398,6	2395,2	172,6	24,789

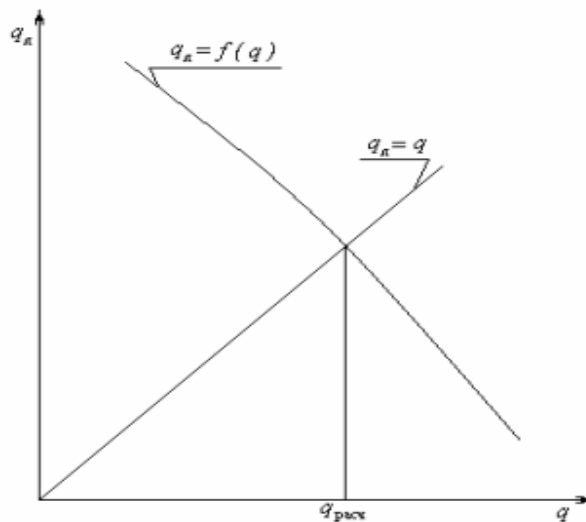


Рис. 4. Определение расчетного теплового потока

### Выводы

1. Анализ полученных результатов позволяет оценить вклад каждой составляющей сложного теплообмена в воздушной прослойке (конвективного теплообмена и излучения) в суммарную величину теплового потока  $q$ .

2. При  $t_1 = 50\text{ }^\circ\text{C}$  температура в воздушной прослойке  $t_{cp} = (t_2 + t_3)/2 = 42\text{ }^\circ\text{C}$ , при этой температуре количество теплоты, передаваемое излучением, составляет 50 % от общего теплового потока, а остальные 50 % – конвекция и молекулярная теплопроводность.

3. При  $t_1 > 50\text{ }^\circ\text{C}$  и средней температуре воздуха в прослойке  $t_{cp} > 42\text{ }^\circ\text{C}$  тепловое излучение начинает превалировать над конвективным теплообменом (включающим в себя передачу тепла теплопроводностью), а при температуре воздуха  $1200\text{ }^\circ\text{C}$  и выше – 99 % теплоты будет передаваться излучением, и лишь 1 % – другими видами теплопереноса.

4. Известно, что при теплообмене между твердой стенкой и газом в диапазоне температур от 0 до  $100\text{ }^\circ\text{C}$  излучающей составляющей процесса теплообмена часто пренебрегают, а количество теплоты, передающееся окружающей среде, определяют по закону Ньютона – Рихмана. Однако, как показали проведенные исследования, для замкнутых газовых прослоек малой толщины ( $\delta = 19\text{ мм}$ ) необходимо учитывать как конвективный теплообмен, так и излучение (в тонких газовых прослойках восходящий и нисходящий потоки воздуха взаимно тормозятся, передача теплоты конвекцией невелика, молекулярная теплопроводность воздуха тоже низкая) [1, 7].

5. Предложенный графоаналитический метод решения системы уравнений, содержащей нелинейное уравнение, позволяет найти единственно верное решение, не прибегая к численному счету, в результате выполнения которого в некоторых температурных диапазонах получается несколько «физических» вариантов решения системы, близких по значениям (несколько действительных корней).

6. Экспериментальная установка может быть использована не только для исследования особенностей протекания сложного теплообмена, но и для определения теплопроводности материалов, включая их температурную зависимость. Для



этой цели используются методы решения обратных задач теплопроводности, когда по известному из эксперимента температурному полю и величине теплового потока из соотношений (3), (4), (5) может быть определен коэффициент теплопроводности любого из слоев. Аналогичным путем может быть вычислена приведенная степень черноты газов или пористых теплоизоляционных материалов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. – М.: Энергия, 1997. – 344 с.
2. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. – М.: Энергия, 1969. – 440 с.
3. *Кудинов И.В.* Графоаналитический метод расчета потерь теплоты через многослойные стенки при наличии лучистого теплообмена между отдельными слоями // Повышение энергоэффективности зданий и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов. – Вып. 6. – СГАСУ. – Самара, 2011. – С. 74–80.
4. *Вытчиков Ю.С., Евсеев Л.Д., Чулков А.А.* Повышение эффективности и долговечности тепловой изоляции трубопроводов систем теплоснабжения с применением скорлуп из пенополиуретана // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура: научно-технический журнал. – 2013. – Вып. № 2 (10). – С. 90–93.
5. *Сапарев М.Е., Вытчиков Ю.С.* Повышение теплозащитных характеристик керамзитобетонных ограждающих конструкций с помощью экранной тепловой изоляции // Строительные материалы: научно-технический и производственный журнал. – М., 2013. – № 11. – С. 12–15.
6. *Кудинов И.В., Абишева Л.С., Бранфилева А.Н.* Исследование сложного теплообмена в многослойной цилиндрической конструкции, включающей энергосберегающие газовые прослойки // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура: научно-технический журнал. – 2014. – Вып. № 3 (16). С. 90–95..
7. *Фокин К.С.* Строительная теплотехника ограждающих частей зданий. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1973. – С. 287.

*Статья поступила в редакцию 3 октября 2016 г.*

## RESEARCH OF COMPLEX HEAT TRANSFER IN MULTILAYER CYLINDRICAL STRUCTURES SOURCES

***L.S. Abisheva***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russian Federation

*Experimental and theoretical investigations of complex heat exchange in gas seam are given which allowed to analyze heat transfer process, to define the quality of each heat exchange constituent (heat convection and emission), to find equivalent heat conduction coefficient of vertical cylindrical air seam at different modes of operation of laboratory unit at wide temperature range (from 0 till 3000 °C). The results will be useful for heat exchange processes in gas seams and for the choice of the most optimal seam thickness, walls material and agent composition, etc.*

***Keywords:*** heat transfer, energy saving gas layer, the radiation, the system of nonlinear equations, convective heat transfer equivalent coefficient of thermal conductivity of the gas layer, the graph-analytical method.

УДК 536.2 (075)

**ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ\*****И.В. Кудинов**Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

*На основе использования дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменным во времени граничным условием первого рода. Использование зависящей от времени дополнительной искомой функции основывается на описываемой параболическим уравнением теплопроводности бесконечной скорости распространения теплоты, согласно которой температура в любой точке пластины начинает изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. Используемые при получении решения дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению дифференциального уравнения краевой задачи в граничных точках. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области. Выполнение интеграла теплового баланса, то есть осредненного в пределах толщины пластины исходного дифференциального уравнения, позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции. Отсутствие необходимости интегрирования исходного дифференциального уравнения по пространственной переменной, ограничиваясь лишь выполнением интеграла теплового баланса, позволяет применять данный метод к задачам, включающим сложные дифференциальные уравнения (нелинейные, с переменными физическими свойствами и др.), получение точных решений которых с помощью классических аналитических методов не представляется возможным.*

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, бесконечная пластина, переменные во времени граничные условия, точное аналитическое решение, бесконечная скорость распространения теплоты, интегральный метод теплового баланса, дополнительные граничные условия, дополнительная искомая функция.

В аналитической теории теплопроводности известны методы, основанные на определении глубины термического (прогретого) слоя, которые объединены под общим названием «интегральные методы теплового баланса» [1–12]. Их использование оказалось эффективным при решении ряда краевых задач, не допускающих получение точных аналитических решений классическими методами. Однако основной проблемой является низкая точность. Согласно этим методам

---

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-00059 мол\_а.

Игорь Васильевич Кудинов (к.т.н.), доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».

процесс теплопроводности разделяется на две стадии по времени, первая из которых характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности тела к его центру. Дополнительной искомой функцией здесь является зависящая от времени глубина прогретого слоя (величина фронта температурного возмущения). Во второй стадии изменение температуры происходит по всей толщине тела, и в рассмотрение вводится дополнительная искомая функция, характеризующая изменение температуры во времени в центре пластины.

Особенностью данной группы методов является противоречие, связанное с допущением о конечной скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности, характеризующее бесконечную ее скорость. Однако результаты многочисленных исследований, приведенные в работах [1, 10–12], показали, что с увеличением числа приближений ( $n$ ) первой стадии процесса время ( $Fo_1$ ) достижения фронтом температурного возмущения центра пластины уменьшается и в пределе при  $n \rightarrow \infty$   $Fo_1 \rightarrow 0$ . Следовательно, с увеличением числа приближений получаемое решение приближается к описанию процесса, протекающего с бесконечной скоростью распространения теплоты, и таким образом снимается указанное выше противоречие.

Следует отметить, что с увеличением числа приближений диапазон времени первой стадии процесса уменьшается, а второй – возрастает. Следовательно, роль второй стадии в определении температурного состояния возрастает. В связи с этим в настоящей работе рассматривается метод получения точного аналитического решения, позволяющий избежать использования первой стадии процесса в интегральном методе теплового баланса. Основные его положения рассмотрим на примере решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменными во времени граничными условиями первого рода (температура стенки – линейная функция времени) в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (\tau > 0; 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\partial T(0, \tau) / \partial x = 0; \quad (3)$$

$$T(\delta, \tau) = T_0 + l \tau, \quad (4)$$

где  $T$  – температура, К;

$x$  – координата, м;

$\tau$  – время, с;

$T_0$  – начальная температура, К;

$a$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;

$l = dT(\delta, \tau) / d\tau = const$  – скорость нагревания стенки, К/с;

$\delta$  – половина толщины пластины, м.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = (T - T_0) / T_0; \quad Fo = a\tau / \delta^2; \quad \xi = x / \delta; \quad B = l\delta^2 / (aT_0), \quad (5)$$

где  $\Theta$  – безразмерная температура;

$Fo = a\tau / \delta^2$  – число Фурье;

$\xi$  – безразмерная координата;

$B = const$  – безразмерный комплекс.

Задача (1)–(4) с учетом (5) примет вид

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial\xi^2 ; (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (6)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (7)$$

$$\partial\Theta(0, Fo)/\partial\xi = 0; \quad (8)$$

$$\Theta(1, Fo) = BFo, \quad (9)$$

где  $B = d\Theta(1, Fo)/dFo = const$  – безразмерная скорость нагревания стенки.

С целью упрощения процесса получения аналитического решения введем дополнительную искомую функцию

$$q(Fo) = \Theta(0, Fo), \quad (10)$$

представляющую изменение температуры во времени в центре пластины. Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой уравнением (6), температура в центре пластины начинает изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. В связи с этим диапазон временного изменения функции  $q(Fo)$  охватывает весь диапазон времени нестационарного процесса ( $0 < Fo < \infty$ ).

Решение задачи (6)–(9) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = B[Fo - (1/2)(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n b_k(q)\varphi_k(\xi)], \quad (11)$$

где  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) – неизвестные коэффициенты;

$\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ , ( $r = 2k - 1$ ) – координатные функции.

Очевидно, что благодаря принятой системе координатных функций соотношение (11) в любом приближении точно удовлетворяет граничным условиям (8), (9). Неизвестные коэффициенты  $b_k(q)$  будем находить из условия (10) и некоторых дополнительных граничных условий, определяемых так, чтобы их выполнение соотношением (11) было эквивалентно выполнению уравнения (7) в граничных точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Отметим, что методы решения краевых задач путем выполнения уравнения на границах области рассматривались в работах [13–15].

Для получения дополнительных граничных условий, выполняемых в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ , продифференцируем условия (8), (9) по переменной  $Fo$ :

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial\Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = B. \quad (13)$$

Соотношения (12) и (13) с учетом уравнения (6) приводятся к следующим дополнительным граничным условиям:

$$\partial^3\Theta(0, Fo)/\partial\xi^3 = 0; \quad (14)$$

$$\partial^2\Theta(1, Fo)/\partial\xi^2 = B. \quad (15)$$

Продифференцируем соотношения (14), (15) по переменной  $Fo$ :

$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left( \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0 ; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0 . \quad (17)$$

Подставляя правую часть уравнения (6) в соотношения (16), (17), получаем дополнительные граничные условия вида

$$\partial^5 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^5 = 0 ; \quad (18)$$

$$\partial^4 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^4 = 0 . \quad (19)$$

Аналогично получаются и последующие дополнительные граничные условия:

$$\partial^7 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^7 = 0 ; \quad (20)$$

$$\partial^6 \Theta(1, Fo) / \partial \xi^6 = 0 . \quad (21)$$

Общие формулы для них будут

$$\partial^i \Theta(0, Fo) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 3, 5, 7, \dots) ; \quad (22)$$

$$\partial^i \Theta(1, Fo) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 4, 6, 8, \dots) . \quad (23)$$

Соотношение (15) не входит в общую формулу (23), так как с учетом  $B = d\Theta(1, Fo) / dFo$  оно, по сути, представляет математическую запись уравнения (6), которое в данной точке будет выполнено полученным решением в любом приближении.

Решение (11) благодаря принятой системе координатных функций в любом приближении точно удовлетворяет дополнительным граничным условиям (22), (23). Отметим, что для краевых задач с более сложными дифференциальными операторами (нелинейных, с переменными коэффициентами и др.) дополнительные граничные условия могут иметь более сложный вид, и в случае, когда они не будут заранее выполняться искомым решением, их необходимо выполнять за счет определения неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ).

В данном случае неизвестные коэффициенты  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) решения (11) будем находить из соотношения (10) и получаемых на его основе дополнительных граничных условий. Для нахождения первого из них продифференцируем соотношение (10) по переменной  $Fo$ :

$$dq(Fo) / dFo = d\Theta(0, Fo) / \partial Fo . \quad (24)$$

Сравнивая соотношение (24) с уравнением (6), получаем дополнительное граничное условие вида

$$\partial^2 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^2 = dq(Fo) / dFo . \quad (25)$$

Дифференцируя (25) по переменной  $Fo$ , находим

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = \frac{d^2 q(Fo)}{dFo^2} . \quad (26)$$

Соотношение (26) с учетом уравнения (6) приводится к следующему дополнительному граничному условию:

$$\partial^4 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^4 = d^2 q(Fo) / dFo^2. \quad (27)$$

С учетом (25), (27) можно записать общую формулу для этих условий:

$$\partial^{2i} \Theta(0, Fo) / \partial \xi^{2i} = d^i q(Fo) / dFo^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

Таким образом, из основных (8), (9) и дополнительных граничных условий (10), (22), (23), (28) невыполненными решением (11) остаются лишь условия (10) и (28), которые и будут использованы далее при определении неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) решения (11).

Найдем решение задачи (6)–(9) в первом приближении. Подставляя (11) (ограничиваясь одним членом ряда) в соотношение (10), для определения неизвестного коэффициента  $b_1(q)$  будем иметь алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим  $b_1(q) = q(Fo) - BFo$ . Соотношение (11) с учетом найденного значения  $b_1(q)$  принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B[Fo - (1/2)((1 - \xi^2) + (2Fo - 1 + 2q/B)\cos(\pi\xi/2))]. \quad (29)$$

Потребуем, чтобы соотношение (29) удовлетворяло осредненному в пределах толщины пластины уравнению (6) – интегралу теплового баланса:

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (30)$$

Подставляя (29) в (30), после определения интегралов относительно функции  $q(Fo)$  будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$8dq/dFo - 2\pi^2 q = B(8 + \pi^2(2Fo - 1)). \quad (31)$$

Интегрируя уравнение (31), находим

$$q(Fo) = B(Fo - (1/2)) + C_1 \exp(-\pi^2 Fo / 4), \quad (32)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Подставляя (32) в (31), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left[ Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{C_1}{B} \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi \xi}{2}\right) \right]. \quad (33)$$

Для определения постоянной интегрирования  $C_1$  составим невязку начального условия (7) и потребуем ортогональности невязки к координатной функции  $\Phi_1(\xi) = \cos(\pi\xi/2)$ :

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cos(\pi\xi/2) d\xi = 0. \quad (34)$$

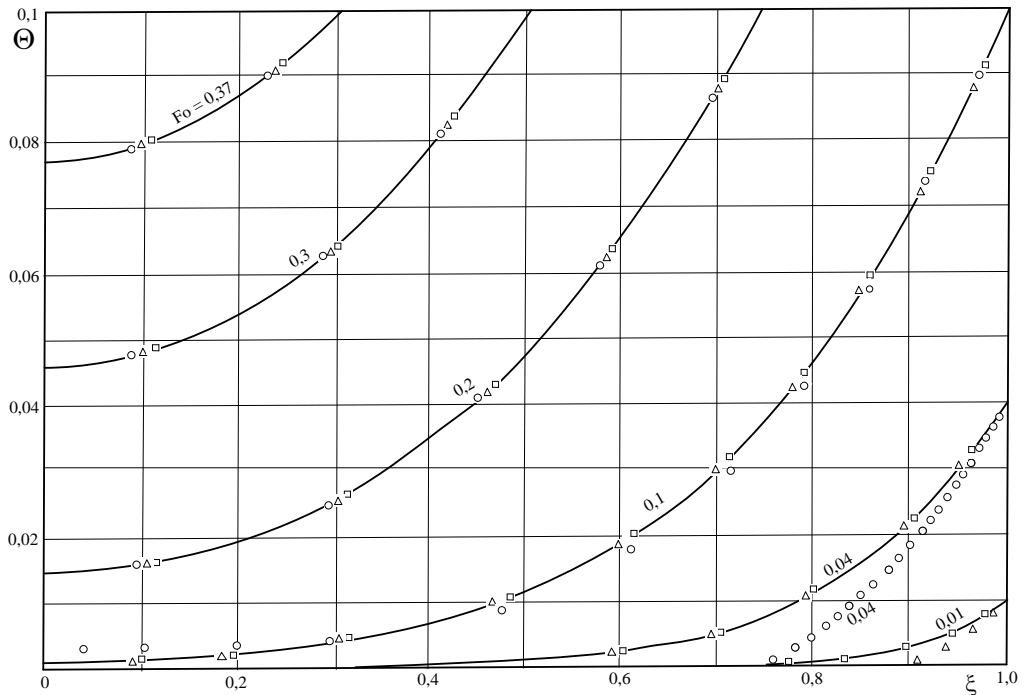
Подставляя (33) в (34), относительно постоянной интегрирования  $C_1$  будем иметь алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим  $C_1 = 16B/\pi^3$ .

Соотношение (33) с учетом найденного значения постоянной интегрирования  $C_1$  принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left[ Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{16}{\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi \xi}{2}\right) \right]. \quad (35)$$

Соотношение (35) представляет решение задачи (6)–(9) в первом приближе-

нии. Оно точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8), (9) и приближенно – начальному условию (7). Результаты расчетов по формуле (35) в сравнении с точным решением [16] приведены на рисунке. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне  $0,1 \leq Fo < \infty$  расхождение не превышает 0,08 %.



Распределение температуры в пластине:

- – первое приближение (по формуле (35)); △ – второе приближение (по формуле (42));
- ◻ – третье приближение (по формуле (48)); ———— – точное решение

Для получения решения во втором приближении подставим (11) (ограничиваясь двумя членами ряда) в условия (10) и (28) (при  $i = 1$ ). Отсюда для определения неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = 1, 2$ ) получаем систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим

$$b_1(q) = \frac{1}{16\pi^2 B} (8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1); \quad b_2(q) = -\frac{1}{\pi^2 B} (8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2), \quad (36)$$

где  $\eta_1 = 8 + 9\pi^2(2Fo - 1)$ ;  $\eta_2 = 8 + \pi^2(2Fo - 1)$ ;  $q' = dq(Fo)/dFo$ .

Соотношение (11) с учетом соотношений (36) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B[Fo - (1/2)(1 - \xi^2) + \eta_3(8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1) \times \\ \times \cos(\pi\xi/2) - \eta_4(8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2) \cos(3\pi\xi/2)], \quad (37)$$

где  $\eta_3 = 1/(16\pi^2 B)$ ;  $\eta_4 = 1/(\pi^2 B)$ .

Подставляя (37) в (30), относительно неизвестной функции  $q(Fo)$  будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$32q'' + 80\pi^2 q' + 18\pi^4 q - B\pi^2(80 + 9\pi^2(2Fo - 1)) = 0, \quad (38)$$

где  $q'' = d^2q(\text{Fo})/d\text{Fo}^2$ .

Интегрируя уравнение (38), находим

$$q(\text{Fo}) = B(\text{Fo} - 1/2) + C_1 \exp(-\pi^2 \text{Fo}/4) + C_2 \exp(-9\pi^2 \text{Fo}/4), \quad (39)$$

где  $C_1, C_2$  – константы интегрирования.

Подставляя (39) в (37) и составляя невязку начального условия (7), получаем

$$\Theta(\xi, 0) = (1/2)B(\xi^2 - 1) + C_1 \cos(\pi\xi/2) + C_2 \cos(3\pi\xi/2) = 0. \quad (40)$$

Требую ортогональности невязки (40) к координатным функциям  $\varphi_1(\xi)$  и  $\varphi_2(\xi)$ , относительно постоянных  $C_1$  и  $C_2$  будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений:

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cos(j\pi\xi/2) d\xi = 0 \quad (j=1, 3). \quad (41)$$

Ввиду ортогональности косинусов неизвестные  $C_1$  и  $C_2$  в системе уравнений (41) разделяются (в каждое уравнение входит лишь одно неизвестное). Из решения этих уравнений находим  $C_1 = 16B/\pi^3$ ;  $C_2 = -16B/(27\pi^3)$ .

С учетом (39) и найденных значений  $C_1$  и  $C_2$  соотношение (37) принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \frac{B}{54\pi^3} \left( 27\pi^3(2\text{Fo} - 1 + \xi^2) + 864e^{-\frac{\pi^2 \text{Fo}}{4}} \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - 32e^{-\frac{9\pi^2 \text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right) \right). \quad (42)$$

Соотношение (42) представляет решение задачи (6)–(9) во втором приближении. Оно точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8), (9) и приближенно – начальному условию (7). Результаты расчетов по формуле (42) в сравнении с точным решением [16] приведены на рисунке. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне  $0, 1 \leq \text{Fo} < \infty$  отклонение от точного решения уменьшается с 0,08 % (в первом приближении) до 0,03 % – во втором.

Для получения решения в третьем приближении подставим (11) (ограничиваясь тремя членами ряда) в (10), (28) (при  $i = 1, 2$ ). Относительно неизвестных коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) будем иметь систему трех алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим:

$$\begin{aligned} b_1(q) &= -\eta_5(B\eta_6 - 32q'' - 272\pi^2 q' - 450\pi^4 q); \\ b_2(q) &= \eta_7(B\eta_8 - 32q'' - 208\pi^2 q' - 50\pi^4 q); \\ b_3(q) &= -\eta_9(B\eta_{10} - 32q'' - 80\pi^2 q' - 18\pi^4 q), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $q' = dq(\text{Fo})/d\text{Fo}$ ;  $q'' = d^2q(\text{Fo})/d\text{Fo}^2$ ;  $\eta_5 = 1/(384\pi^4 B)$ ;  $\eta_6 = 225\pi^4(2\text{Fo} - 1) + 272\pi^2$ ;  $\eta_7 = 1/(256\pi^4 B)$ ;  $\eta_8 = 25\pi^4(2\text{Fo} - 1) + 208\pi^2$ ;  $\eta_9 = 1/(768\pi^4 B)$ ;  $\eta_{10} = 9\pi^4(2\text{Fo} - 1) + 80\pi^2$ .

Подставляя (11) (с учетом найденных значений  $b_k(q)$ , ( $k = 1, 2, 3$ )) в инте-



грал теплового баланса (30), после определения интегралов относительно неизвестной функции  $q(\text{Fo})$  будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-128q''' - 1120\pi^2 q'' - 2072\pi^4 q' - 450\pi^6 q + B\pi^4(225\pi^2(2\text{Fo} - 1) + 2072) = 0, \quad (44)$$

где  $q''' = d^3 q(\text{Fo})/d\text{Fo}^3$ .

Интегрируя уравнение (44), находим

$$q(\text{Fo}) = B(\text{Fo} - (1/2)) + C_1 \exp(-\pi^2 \text{Fo}/4) + C_2 \exp(-9\pi^2 \text{Fo}/4) + C_3 \exp(-25\pi^2 \text{Fo}/4), \quad (45)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – постоянные интегрирования, определяемые из начального условия (7). Составляя его невязку, получаем

$$\Theta(\xi, 0) = (1/2)B(\xi^2 - 1) + C_1 \cos(\pi\xi/2) + C_2 \cos(3\pi\xi/2) + C_3 \cos(5\pi\xi/2) = 0. \quad (46)$$

Требую ортогональности невязки (46) к координатным функциям  $\varphi_j(\xi)$ , ( $j=1, 3, 5$ ), относительно постоянных  $C_1, C_2, C_3$  будем иметь систему трех алгебраических линейных уравнений:

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \cos(j\pi\xi/2) d\xi = 0 \quad (j=1, 3, 5). \quad (47)$$

Ввиду ортогональности косинусов неизвестные  $C_1, C_2, C_3$  в системе уравнений (47) разделяются и находятся в виде  $C_1 = 16B/\pi^3$ ;  $C_2 = -16B/(27\pi^3)$ ;  $C_3 = 16B/(125\pi^3)$ .

С учетом (43), (45) и найденных значений постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  соотношение (11) в третьем приближении принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \frac{B}{\pi^3} \left( \pi^3 \left( \text{Fo} - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \right) + 16e^{-\frac{\pi^2 \text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - \frac{16}{27} e^{-\frac{9\pi^2 \text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right) + \frac{16}{125} e^{-\frac{25\pi^2 \text{Fo}}{4}} \cos\left(\frac{5\pi\xi}{2}\right) \right). \quad (48)$$

Соотношение (48) точно удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8), (9). Начальное условие (7) в данном случае удовлетворяется приближенно (в третьем приближении). Анализ результатов расчетов, приведенных на рисунке, позволяет заключить, что температуры, найденные по формуле (48), в диапазоне  $0, 1 \leq \text{Fo} < \infty$  практически совпадают с точными их значениями [16].

Из анализа формул (35), (42), (48) можно заключить, что появление нового слагаемого в каждом последующем приближении подчиняется определенной закономерности. Поэтому можно записать общую формулу решения для любого числа приближений, которая имеет вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = B \left( \text{Fo} - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi} e^{-(r\pi/2)^2 \text{Fo}} \frac{1}{(r\pi/2)^2} \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \right), \quad (49)$$

где  $r = 2k - 1$ .

Исследование решений для последующих приближений показывает, что все

они описываются соотношением (49), которое при  $n \rightarrow \infty$  полностью совпадает с классическим точным аналитическим решением [16].

### Выводы

1. Путем использования дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности при переменных во времени граничных условиях первого рода. Введение дополнительной искомой функции, характеризующей изменение во времени температуры в центре пластины, основывается на свойстве параболического уравнения теплопроводности, связанном с бесконечной скоростью распространения теплоты.

2. Дополнительные граничные условия, определяемые с использованием исходного дифференциального уравнения и заданных граничных условий, находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению в граничных точках дифференциального уравнения краевой задачи. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области.

3. Отсутствие необходимости непосредственного интегрирования исходного уравнения в частных производных по пространственной переменной, при замене его выполнением интеграла теплового баланса, позволяет свести решение краевой задачи к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции. В связи с этим данный метод может быть использован для решения нелинейных краевых задач, задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды, с переменными начальными условиями и других задач.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса. – М.: Инфра-М, 2013. – 391 с.
2. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Энергетика и транспорт. – 1970. – № 5. – С. 109–150.
3. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: Сборник научных трудов. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 41–96.
4. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975.
5. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.
6. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13. – № 3.
7. Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. – Минск: Белорусская наука, 2005. – 560 с.
8. Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 470 с.
9. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
10. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82. – № 3. – С. 540–558.
11. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Получение приближенных аналитических решений при рассогласовании начальных и граничных условий в задачах теории теплопроводности // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 4. – С. 63–71.
12. Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П. Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журнал вычислитель-

- ной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55. – № 4. – С. 129–140.
13. Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Доклады АН СССР. – 1934. – Т. 2. – № 9. – С. 532–534.
  14. Фёдоров Ф.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
  15. Кудряшов Л.И., Меньшик Н.Л. Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Машиностроение, 1979. – 232 с.
  16. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

*Статья поступила в редакцию 21 октября 2016 г.*

## **OBTAINING EXACT ANALYTICAL DECISIONS OF TASKS HEAT CONDUCTIONS WITH VARIABLES IN TIME BOUNDARY CONDITIONS**

***I.V. Kudinov***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russian Federation

*On the basis use of additional required function and additional boundary conditions in an integral method of heat balance, the exact analytical decision of the nonstationary task of heat conduction for the infinite plate with a variable boundary condition of the first kind in time is received. Use of time-dependent additional required function is based on the heat conduction of the infinite speed of distribution of warmth described by the parabolic equation according to which temperature in any point of a plate begins to change right after the application of a boundary condition of the first kind on its surface. The additional boundary conditions used when obtaining the solution are found in such look that their execution by the required decision was equivalent to execution of a differential equation of boundary value problem in boundary points. It is shown that execution of the equation in boundary points, leads to its execution and in the considered area. Execution of integral of a heat balance, that is input differential equation, average within thickness of a plate, allows to consolidate the solution of a partial equation to integration of an ordinary differential equation of rather additional required function. Absence of need of integration of the input differential equation on space variable, being restricted only to execution of integral of a heat balance, allows to apply this method to the tasks including difficult differential equations (non-linear, with variable physical properties, etc.) which obtaining exact decisions by means of classical analytical methods isn't possible.*

**Keywords:** *nonstationary heat conduction, the infinite plate, variables in time boundary conditions, the exact analytical solution, the infinite speed of distribution of warmth, an integral method of a heat balance, additional boundary conditions, additional required function.*