

# Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы

УДК 681.391:543/545

## АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСА ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА – ЭРМИТА

*Р.Т. Сайфуллин, А.В. Бочкарев*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

**Аннотация.** Цель работы заключается в разработке базиса, позволяющего по коэффициентам разложения исходного сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита восстановить массив вейвлет-коэффициентов исходного сигнала. Для формирования базиса вейвлет-преобразования аналитически вычисляется вейвлет-преобразование функций Чебышева – Эрмита. В качестве вейвлетов в работе используются производные функции Гаусса. Рассматриваются вопросы формирования базисов перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованиям с использованием в качестве анализирующих вейвлетов производных функции Гаусса 1-го и  $m$ -го порядка. В качестве примера приводится базис перехода от коэффициентов разложения исходного сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ-вейвлета. При этом вейвлет-преобразование сигнала осуществляется в два этапа. На первом этапе получают разложение исходного сигнала в виде взвешенной суммы базисных функций Чебышева – Эрмита. На втором этапе, зная весовые множители функций, полученных на первом этапе, а также аналитическое выражение непрерывного вейвлет-преобразования для конкретных базисных функций и вейвлета, восстанавливают вейвлет-преобразование исходного сигнала. Приведены примеры вейвлет-преобразований сформированных базисов. Благодаря использованию полученных формул расчета вейвлет-коэффициентов удается построить быстрые вычислительные алгоритмы обработки. Для вычислений и графического представления результатов моделирования использована система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 11.3.

**Ключевые слова:** функции Чебышева – Эрмита, вейвлет-преобразование, вейвлеты Гаусса, функция Гаусса, базис вейвлет-преобразования, преобразование сигналов, разложение сигнала, МНАТ-вейвлет.

---

*Сайфуллин Раухат Талгатович (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».*

*Бочкарев Андрей Владимирович, аспирант.*

## Введение

Одним из подходов к созданию алгоритмов обработки сигналов является кодирование сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита с последующим декодированием по другим, предварительно рассчитанным базисам; причем в зависимости от выбора базиса возможно получить сам сигнал [1–3], его производную различных порядков [3, 4], вейвлет-преобразование [5] и т. п. Функции Чебышева – Эрмита находят широкое распространение в различных областях науки и техники [6–13], обладают сглаживающим свойством [13], а также используются для описания несимметричных пиков аналитических сигналов [14].

Вейвлет-анализ является одним из наиболее мощных и гибких средств исследования и цифровой обработки сигналов: помимо задач их фильтрации и сжатия анализ в базисе вейвлет-функций позволяет решить задачи идентификации, моделирования, аппроксимации стационарных и нестационарных процессов, исследовать наличие разрывов и т. д.

В рамках данной работы рассматривается возможность формирования в общем виде базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к его непрерывному вейвлет-преобразованию. Ранее данный вопрос был рассмотрен на некоторых частных примерах [5].

### 1. Формирование базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием производной первого порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета

При использовании производной  $m$ -го порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета вейвлет-преобразование  $n$ -й базисной функции имеет вид

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot g_m\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (1)$$

причем

$$\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) = \frac{1}{\alpha_n} \cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2}}, \quad (2)$$

где  $\alpha_n = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$  – нормирующая константа;  
 $x_0$  – величина сдвига функции Чебышева – Эрмита;  
 $\gamma$  – коэффициент масштаба функции Чебышева – Эрмита;

$$g_m(x) = (-1)^{m+1} \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}, \quad (3)$$

или, с учетом сдвига ( $b$ ) и масштаба ( $a$ ):

$$g_m\left(\frac{x-b}{a}\right) = (-1)^{m+1} \frac{d^m e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}}{d\left(\frac{x-b}{a}\right)^m}.$$

В (2)  $H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$  – полином Эрмита  $n$  порядка, определяемый в общем виде выражением [15–17]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

Также полиномы Эрмита могут быть заданы в явном виде [16, 17]:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2 \cdot x)^{n-2k},$$

где  $\lfloor \cdot \rfloor$  – целая часть,

или, с учетом переменных масштаба ( $\gamma$ ) и сдвига ( $x_0$ ):

$$H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} \left(2 \cdot \frac{x-x_0}{\gamma}\right)^{n-2k}. \quad (4)$$

Рассмотрим нахождение вейвлет-преобразования  $n$ -й базисной функции первого порядка. Для этого в качестве вейвлета необходимо использовать

$$g_1\left(\frac{x-b}{a}\right) = -\frac{x-b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}. \quad (5)$$

Подстановка (2) и (5) в выражение для прямого вейвлет-преобразования (1) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} W_{m,\varphi_n}(a,b) &= -\frac{1}{\alpha_n \sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-b}{a} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2} \cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2}} dt = \\ &= -\frac{1}{\alpha_n \sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-b}{a} \cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы упростить нахождение интеграла (6), введем новые переменные  $t$  и  $d$ :

$$t = x - \frac{a^2 x_0 + \gamma^2 b}{a^2 + \gamma^2}, \quad (7)$$

$$d = \sqrt{a^2 + \gamma^2}. \quad (8)$$

С учетом этих переменных получим следующий вид степени экспоненты выражения (6):

$$-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 = -\frac{t^2 d^2}{2\gamma^2 a^2} - \frac{(x_0-b)^2}{2d^2}. \quad (9)$$

Подставим (9) в (6):

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = -\frac{1}{\alpha_n \sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-b}{a} \cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot e^{-\frac{t^2 d^2}{2\gamma^2 a^2} - \frac{(x_0-b)^2}{2d^2}} dt. \quad (10)$$

Поскольку была выполнена замена (7), следует перейти от  $x$  к  $t$  во всех частях выражения (10), для чего выполним замены:

$$\begin{aligned} \frac{x-b}{a} &= \frac{1}{a}(t+a^2 p), \\ \frac{x-x_0}{\gamma} &= \frac{1}{\gamma}(t-\gamma^2 p), \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{x_0-b}{a^2 + \gamma^2} = \frac{x_0-b}{d^2}.$$

Таким образом, (10) примет вид:

$$\begin{aligned} W_{m,\varphi_n}(a,b) &= -\frac{1}{\alpha_n \sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}(t+a^2 p) \cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t-\gamma^2 p]\right) \cdot e^{-\frac{t^2 d^2}{2\gamma^2 a^2} - \frac{(x_0-b)^2}{2d^2}} dt = \\ &= -\frac{1}{\alpha_n \sqrt{a^3}} \cdot e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (t+a^2 p) \cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t-\gamma^2 p]\right) \cdot e^{-\frac{t^2 d^2}{2\gamma^2 a^2}} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Для нахождения данного интеграла следует привести

$$(t+a^2 p) \cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t-\gamma^2 p]\right) \cdot e^{-\frac{t^2 d^2}{2\gamma^2 a^2}}$$

к виду

$$e^{-t^2 q} \sum_{i=0}^n \rho_i t^i, \quad (12)$$

где  $\rho_i$  – некоторый коэффициент при переменной  $t$  соответствующей степени;  
 $q$  – некоторая константа.

Представление (12) выгодно потому, что интеграл такого выражения является табличным [18]. Следовательно, в следующем полиноме

$$H_{1,\varphi_n}(t) \stackrel{def}{=} (t+a^2 p) \cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t-\gamma^2 p]\right), \quad (13)$$

который является частью подынтегрального выражения, необходимо привести все подобные члены таким образом, чтобы сформировать сумму вида (12).

Рассмотрим полином Эрмита, входящий в (13), и для удобства записи выполним замену  $\lambda_k^n = \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!}$ :

$$H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t - \gamma^2 p]\right) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} (t - \gamma^2 p)^{n-2k}. \quad (14)$$

Очевидно, что  $(t - \gamma^2 p)^{n-2k}$  – бином Ньютона степени  $n-2k$ , который можно представить в виде

$$(t - \gamma^2 p)^{n-2k} = \sum_{i=0}^{n-2k} C_{n-2k}^i (-1)^i t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^i, \quad (15)$$

где  $(-1)^i$  характеризует тот факт, что основание бинома представлено разностью;

$$C_{n-2k}^i = \frac{(n-2k)!}{i!(n-2k-i)!}.$$

Подставив (15) в (14), получим:

$$H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t - \gamma^2 p]\right) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k} [(-1)^i C_{n-2k}^i \cdot t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^i] \right\}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13), с учетом выполненных замен имеем:

$$H_{1,\varphi_n}(t) = n! (t + a^2 p) \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k} [(-1)^i C_{n-2k}^i \cdot t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^i] \right\},$$

где за счет дистрибутивности операции суммирования множитель  $(t + a^2 p)$  можно внести под знак суммы:

$$H_{1,\varphi_n}(t) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \times \sum_{m=0}^{n-2k} [(-1)^m C_{n-2k}^m (t^{n-2k-m+1} \cdot \gamma^{2m} p^m + t^{n-2k-m} \cdot \gamma^{2m} p^{m+1} a^2)] \right\}. \quad (17)$$

Выражение (17) соответствует виду суммы, приведенному в (12). Такое представление выгодно потому, что известен интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 q} dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{\sqrt{2^n q^n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{q}}, & n \bmod 2 = 0, \\ 0, & n \bmod 2 = 1, \end{cases}$$

который позволяет проинтегрировать каждый член суммы вида (12).

При известном  $q = \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2$  данное выражение примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2} dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi} (a\gamma)^{n+1} \cdot (n-1)!!}{d^{n+1}}, n \bmod 2 = 0. \\ 0, n \bmod 2 = 1. \end{cases} \quad (18)$$

Для формирования базиса перехода от коэффициентов Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с анализирующим вейвлетом в виде первой производной функции Гаусса необходимо подставить в качестве  $\left(t + a^2 \frac{x_0 - b}{a^2 + \gamma^2}\right) \cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t - \gamma^2 p]\right)$  выражение (17) в (11):

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{-e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}}{\alpha_n \sqrt{a^3}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{1,\varphi_n}(t) \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2} dt, \quad (19)$$

при этом получим сумму интегралов вида (18).

Введем следующее обозначение:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2} dt,$$

а также соответствующее ему

$$H_{1,\varphi_n}(I) \stackrel{def}{=} H_{1,\varphi_n}(t), \quad t^n \rightarrow I_n,$$

с учетом которых (19) можно представить в виде

$$W_{1,\varphi_n}(a,b) = \frac{-e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}}{\alpha_n \sqrt{a^3}} H_{1,\varphi_n}(I). \quad (20)$$

Таким образом, полином (18) при замене  $t^n = I_n$  является результатом интегрирования выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{1,\varphi_n}(t) \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2} dt.$$

Выражение (20) задает базис перехода от коэффициентов Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с первой производной функции Гаусса в качестве вейвлета.

**2. Формирование базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием производной  $m$ -го порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета**

Чтобы распространить результат на произвольный порядок  $m$  производной функции Гаусса, рассмотрим выражение (3), в общем виде описывающее  $m$ -й вейвлет. Представим его в следующем виде:

$$g_m(x) = (-1)(-1)^m \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}. \quad (21)$$

Обратимся к определению полиномов Эрмита. Помимо полиномов Эрмита  $H_n(x)$  существуют также  $He_m(x)$ , определяемые выражением [17]:

$$He_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}.$$

Следовательно:

$$(-1)^m \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m} = e^{-\frac{x^2}{2}} He_m(x). \quad (22)$$

Выполнив замену (22) в (21), а также  $\frac{x-b}{a} \stackrel{def}{=} x$ , получим следующий вид выражения для гауссовских вейвлетов:

$$g_m\left(\frac{x-b}{a}\right) = (-1)^m \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} He_m\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (23)$$

которое выгодно тем, что  $He_m(x)$  полиномы Эрмита, равно как и  $H_n(x)$ , также имеют явное представление:

$$He_m\left(\frac{x-b}{a}\right) = m! \sum_{j=0}^{m/2} \lambda_j^m \frac{(x-b)^{m-2j}}{2^j a^{m-2j}}, \quad (24)$$

где  $\lambda_j^m = \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}$ .

Замена дифференцирования экспоненты на полином дает преимущества при интегрировании.

Таким образом, при использовании (23) в качестве выражения, задающего вейвлет  $m$ -го порядка, после приведения всех подобных членов и выделения полного квадрата вейвлет-преобразование (1) примет вид

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{-e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}}{\alpha_n \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} He_m\left(\frac{x-b}{a}\right) \cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2} dt. \quad (25)$$

Очевидно, что нахождение интеграла в (25), так же как и в случае с вейвлетом первого порядка, сводится к приведению

$He_m\left(\frac{x-b}{a}\right) \cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2}$  к виду (12). Для этого выполним следующие замены, аналогичные тем, что были использованы в (11):

$$\frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}(t + a^2 p),$$

$$\frac{x-x_0}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}(t - \gamma^2 p),$$

где

$$p = \frac{x_0 - b}{a^2 + \gamma^2} = \frac{x_0 - b}{d^2}.$$

В результате (25) примет вид

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{-e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}}{\alpha_n \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} He_m\left(\frac{1}{a}[t + a^2 p]\right) \cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t - \gamma^2 p]\right) \cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}}\right)^2} dt. \quad (26)$$

Для нахождения интеграла (26) вначале рассмотрим  $He_m(x)$  полином Эрмита из (26):

$$\begin{aligned} He_m\left(\frac{1}{a}[t + a^2 p]\right) &= m! \sum_{j=0}^{m/2} \lambda_j^m \left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j} \left(\frac{1}{2}\right)^j (t + a^2 p)^{m-2j} = \\ &= m! \sum_{j=0}^{m/2} \left\{ \lambda_j^m \left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{l=0}^{m-2j} \left[ C_{m-2j}^l \cdot t^{m-2j-l} \cdot a^{2l} p^l \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь представляется возможным раскрыть скобки в соответствии с выражением для бинома Ньютона (аналогичного (15), но без  $(-1)^i$ , поскольку основание бинома представлено суммой, а не разностью).

Введем следующее обозначение аналогично рассмотренному ранее случаю (при  $m = 1$ ):

$$H_{m,\varphi_n}(t) \stackrel{def}{=} \frac{H_n\left(\frac{1}{\gamma}[t - \gamma^2 p]\right)}{n!} \cdot \frac{He_m\left(\frac{1}{a}[t + a^2 p]\right)}{m!}, \quad (28)$$

где  $m!$  и  $n!$  вынесены для удобства вычислений.

Подставляя в (28) выражение (16), получим:

$$H_{m,\varphi_n}(t) = \frac{He_m(t)}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{n/2} \left\{ \lambda_k^n \cdot \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \cdot \sum_{i=0}^{n-2k} \left[ (-1)^i \cdot C_{n-2k}^i \cdot t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} \cdot p^i \right] \right\}.$$



С учетом дистрибутивности суммирования вносим  $\frac{He_m(t)}{m!}$  под знак внутренней суммы:

$$H_{m,\varphi_n}(t) = \sum_{k=0}^{n/2} \left\{ \lambda_k^n \cdot \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \cdot \sum_{i=0}^{n-2k} \left[ (-1)^i \cdot C_{n-2k}^i \cdot \gamma^{2i} \cdot p^i \cdot t^{n-2k-i} \cdot \frac{He_m(t)}{m!} \right] \right\}. \quad (29)$$

Выполняя подстановку (27) в (29), получим:

$$H_{m,\varphi_n}(t) = \sum_{k=0}^{n/2} \left\{ \lambda_k^n \cdot \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \cdot \sum_{i=0}^{n-2k} \left\{ (-1)^i \cdot C_{n-2k}^i \cdot \gamma^{2i} \cdot p^i \cdot t^{n-2k-i} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{j=0}^{m/2} \left[ \lambda_j^m \left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{l=0}^{m-2j} \left( C_{m-2j}^l \cdot t^{m-2j-l} \cdot a^{2l} \cdot p^l \right) \right] \right\} \right\}.$$

За счет дистрибутивности операции суммирования вносим  $t^{n-2k-i}$  под знак внутренней суммы (по индексу  $l$ ):

$$H_{m,\varphi_n}(t) = \sum_{k=0}^{n/2} \left\{ \lambda_k^n \cdot \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \cdot \sum_{i=0}^{n-2k} \left\{ (-1)^i \cdot C_{n-2k}^i \cdot \gamma^{2i} \cdot p^i \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{j=0}^{m/2} \left[ \lambda_j^m \left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{l=0}^{m-2j} \left( C_{m-2j}^l \cdot t^h \cdot a^{2l} \cdot p^l \right) \right] \right\} \right\}, \quad (30)$$

где  $h = n - 2k - i + m - 2j - l$ .

Таким образом, (30) представляет собой общий вид произведения полиномов, являющихся частями функций Чебышева – Эрмита и Гаусса соответственно (причем произвольных порядков  $m$  и  $n$ ). Аналогично рассмотренному ранее случаю ( $m=1$ ), выражение (30) имеет вид (12), а значит, может быть использован интеграл (18). Следовательно, справедлива и замена  $t^n \rightarrow I_n$  для перехода от полинома (30) к сумме интегралов вида (18). А значит, (26) можно записать в виде

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}}{\alpha_n \sqrt{a}} \cdot m!n! \cdot H_{m,\varphi_n}(I). \quad (31)$$

Выражение (31) задает базис перехода от коэффициента разложения сигнала по  $n$ -й функции Чебышева – Эрмита к вейвлет-коэффициентам, полученным при использовании в качестве анализирующего вейвлета производной функции Гаусса  $m$ -го порядка. Вейвлет-коэффициенты  $m$ -го порядка представляет собой сумму полученных по (31) выражений при различных  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ , где  $N$  – номер максимальной используемой базисной функции Чебышева – Эрмита).

**3. Формирование базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ в качестве анализирующего вейвлета (частный случай базиса перехода к вейвлет-преобразованию с использованием производной Гаусса  $m$ -го порядка)**

Очевидно, что при  $m=2$  вейвлет (3) будет совпадать с МНАТ-вейвлетом. Следовательно, базис (31) будет служить для перехода от коэффициентов разложения Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ-вейвлета. При подстановке  $m=2$  в (31) получим:

$$W_{2,\varphi_n}(a,b) = \frac{-2e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}} n!}{\alpha_n \sqrt{a}} H_{2,\varphi_n}(I), \quad (32)$$

$$H_{2,\varphi_n}(t) = \sum_{k=0}^{n/2} \left\{ \lambda_k^n \left( \frac{2}{\gamma} \right)^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k} [(-1)^i C_{n-2k}^i \times \right. \\ \left. \times (t^{n-2k-m+1} \cdot \gamma^{2m} p^m + t^{n-2k-i+1} \cdot 2 \cdot \gamma^{2i} p^{i+1} a^2 + t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^{i+2} a^4) \right\}.$$

Выражение (32) задает базис перехода от коэффициентов разложения по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ-вейвлета.

**4. Вычисление вейвлет-преобразования в сформированных базисах**

Чтобы оценить работоспособность полученных базисов, вначале зададим тестовый сигнал. В качестве него используем массив из 33 значений  $s$  (рис. 1), поскольку на практике сигналы, снятые с выхода какого-либо устройства, представлены в виде набора дискретных отсчетов.

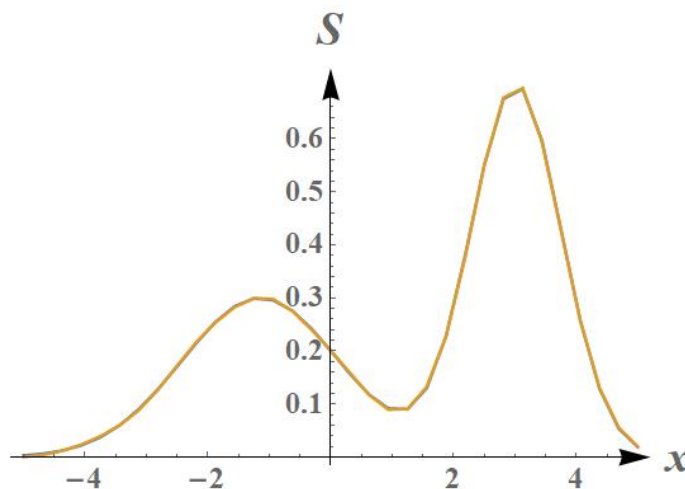


Рис. 1. Тестовый сигнал

Подвергнем этот сигнал непрерывному вейвлет-преобразованию с производной 1-го, 2-го, 4-го и 6-го порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета, используя как общепринятое выражение для вычисления вейвлет-преобразования с данным вейвлетом, так и сформированные базисы.

Алгоритм вычисления вейвлет-преобразования в каждом из сформированных выше базисов состоит из следующих этапов [5]:

1) представление исходного сигнала в виде разложения в базисе функций Чебышева – Эрмита и нахождение коэффициентов разложения [1–3];

2) нахождение базисных функций для восстановления непрерывного вейвлет-преобразования различных порядков;

3) восстановление непрерывного вейвлет-преобразования сигнала на основе рассчитанных на первом этапе коэффициентов и синтезированного на втором этапе базиса.

Очевидно, что при большей точности кодирования/декодирования точность восстановления вейвлет-преобразования также должна быть больше, и наоборот. Кодирование тестового сигнала по 12 базисным функциям Чебышева – Эрмита дает коэффициенты, при декодировании которых формируется сигнал, визуально неотличимый от исходного. Приведенная погрешность декодированного сигнала относительно исходного, заданная выражением

$$\gamma_S = \frac{S - \hat{S}}{|S|_{\max}} \cdot 100\%,$$

где  $|\cdot|_{\max}$  – максимальное значение массива по модулю, отражена на рис. 2.

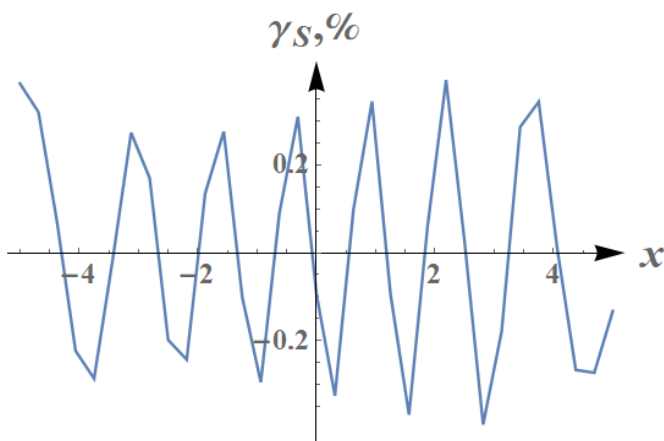


Рис. 2. Приведенная погрешность декодированного сигнала относительно исходного

Рассмотрим теперь непосредственно результаты вейвлет-преобразования тестового сигнала (вейвлет-коэффициенты), полученные с использованием сформированных базисов ( $\hat{W}_m(a, b)$ ) и рассчитанные по общепринятым выражениям ( $W_m(a, b)$ ) на рис. 3. Результаты максимально схожи и визуально неразличимы.

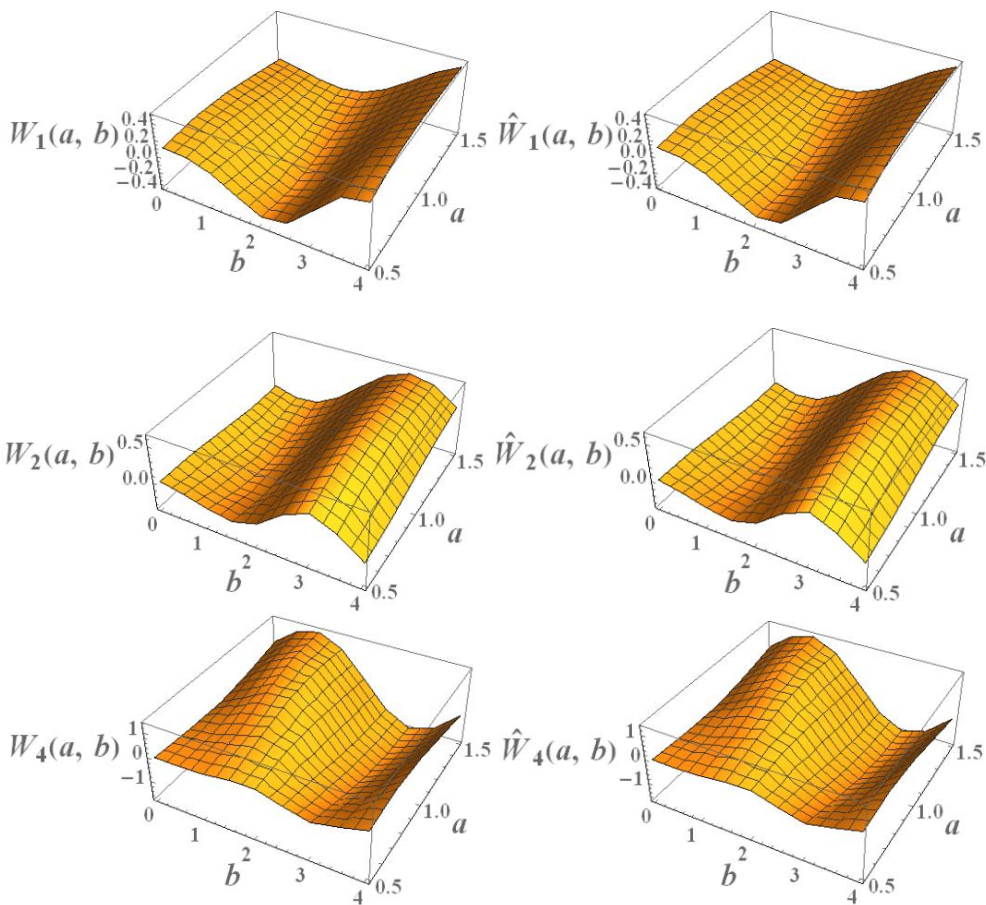


Рис. 3. Сравнение вейвлет-коэффициентов

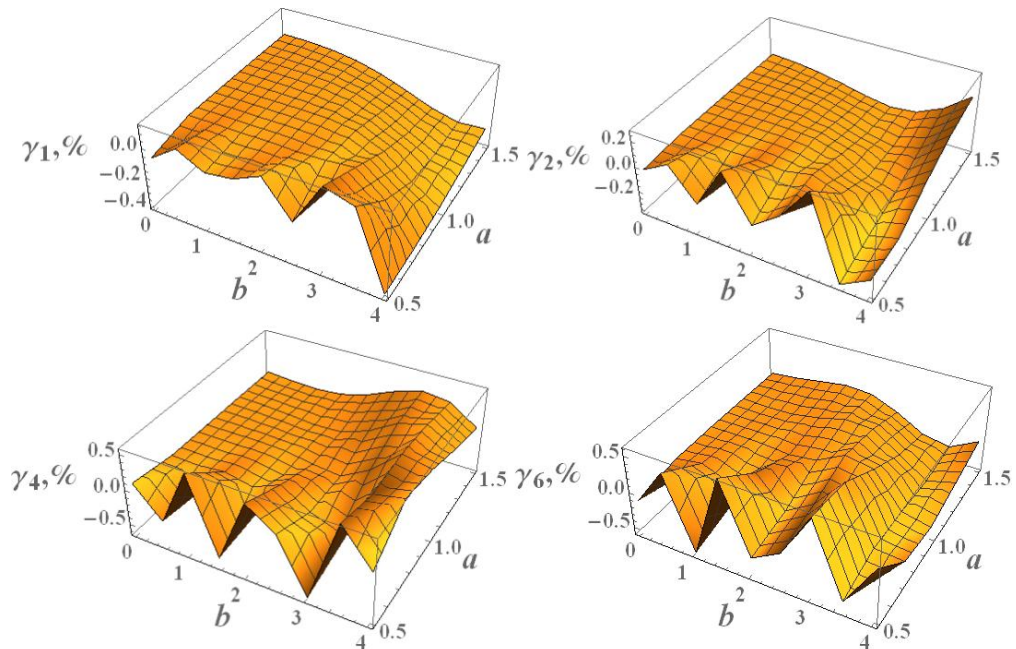


Рис. 4. Приведенная погрешность вейвлет-коэффициентов

Для возможности сравнения рассчитаем приведенную погрешность вейвлет-преобразования по сформированным базисам относительно вейвлет-преобразования по общепринятым выражениям:

$$\gamma_m = \frac{W_m(a, b) - \hat{W}_m(a, b)}{|W_m(a, b)|_{\max}} \cdot 100\%.$$

Приведенная погрешность для каждого из порядков вейвлета представлена на рис. 4.

### Заключение

Анализируя полученные графики на рис. 4, можно видеть, что приведенная погрешность вейвлет-коэффициентов сопоставима с приведенной погрешностью декодирования самого сигнала и не превышает ~0,5 %. Благодаря использованию полученных формул расчета вейвлет-коэффициентов в базисе функций Чебышева – Эрмита удастся построить быстрые вычислительные алгоритмы обработки, что в сочетании с высокой их эффективностью является значительным достоинством метода, особенно при вычислении коэффициентов различных высоких порядков.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Выбор необходимого числа базисных функций в алгоритмах кодирования-декодирования сигналов аналитических приборов // Информационно-измерительные и управляющие системы: межвуз. сб. науч. статей. – 2019. – Вып. 1(17). – С. 35–42.
2. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Иерархическое кодирование при обработке сигналов аналитических приборов // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. XXI Междунар. конф. Самарский научный центр РАН, ИПУ СС РАН. Т. 1. – Самара, 2019. – С. 467–470.
3. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Использование функций Чебышева – Эрмита в обработке сигналов аналитических приборов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки. – 2019. – № 1(61). – С. 68–81.
4. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Вычисление производных аналитического сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита // Математическое моделирование и краевые задачи: Матер. XI Всеросс. науч. конф. с междунар. участием. 27–30 мая 2019 г., Самара. – 2019. – Т. 2. – С. 137–139.
5. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Вычисление непрерывного вейвлет-преобразования сигналов в базисе функций Чебышева – Эрмита // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки. – 2019. – № 2(62). – С. 113–124.
6. Martens J.B. The Hermite transform – theory. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1595–1606.
7. Martens J.B. The Hermite transform – applications. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1607–1618.
8. Павельева Е.А., Крылов А.С. Поиск и анализ ключевых точек радужной оболочки глаза методом преобразования Эрмита // Информатика и ее применения. – 2010. – № 1, т. 4. – С. 79–82.
9. Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B. The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition. LNCS, 2008. No. 5197. Pp. 86–93.
10. Мамаев Н.В. [и др.]. Алгоритм нелокального среднего на основе разложения по функциям Эрмита в задачах компьютерной томографии // ГРАФИКОН'2013: Тр. конф. 2013. – С. 254–258.
11. Горлов В.А., Паршин Д.С., Разложение функции с экспоненциальным ростом в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышева – Эрмита // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – Т. 3. № 8–3 (19–3). – С. 245–248.
12. Баяковский Ю.М. [и др.]. Нейросетевой анализ и сопоставление частотно-временных векторов на основе краткосрочного спектрального представления и адаптивного преобразования Эрмита / Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2001, 087.

13. Балакин Д.А., Штыков В.В. Построение ортогонального банка фильтров на основе преобразований Эрмита для обработки сигналов // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 9. – С. 1–15.
14. Бельский Б.Г., Виленчик Л.З. Хроматография полимеров. – М.: Химия, 1978. – 334 с.
15. Сега Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
16. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
17. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

*Статья поступила в редакцию 1 сентября 2019 года*

## ALGORITHM FOR CALCULATING THE WAVELET-TRANSFORM OF THE SIGNALS USING THE CHEBYSHEV-HERMIT FUNCTIONS

**R.T. Sayfullin, A.V. Bochkarev**

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

**Abstract.** The paper deals with the development of basis for computation wavelet-transform from the coefficients given by decomposition original signal with Chebyshev-Hermite functions. Decomposition with Chebyshev-Hermite functions allow to transform original signal into coefficients, that can be used for reconstructing different transforms of original signal like Fourier transform, derivatives of different orders, wavelet transform and others. These transforms can be obtained by using corresponding bases that need to be created. In this paper considered basis for wavelet-transform with derivative of arbitrary order of the Gauss functions as analyzing wavelet. This basis is computed by applying continuous wavelet transform with derivative of Gauss functions as analyzing wavelet into the Chebyshev-Hermite functions. Arrays of the wavelet coefficients are presented as 3D plots. The Mathematica 11.3 computer algebra system was used to calculations and graph the results.

**Keywords:** Chebyshev – Hermite functions, wavelet-transform, Gauss wavelets, Gauss function, wavelet-transform basis, signal transform, signal decomposition, MHAT wavelet.

### REFERENCES

1. Saifullin R.T., Bochkarev A.V. Selection of the required number of basis functions in the coding-decoding algorithms of signals of analytical instruments. Information and measuring and control systems: mezhvuz. Sat scientific articles. Issue 1 (17). – 2019. Pp. 35–42.
2. Saifullin R.T., Bochkarev A.V. Hierarchical coding for signal processing of analytical instruments. Problems of control and modeling in complex systems. Proceedings of the XXI International Conference. Samara Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, IPU SS RAS. Vol. 1. 2019. Pp. 467–470.
3. Saifullin R.T., Bochkarev A.V. The use of Chebyshev-Hermite functions in signal processing of analytical instruments. Bulletin of the Samara State Technical University. Series: technical sciences, No. 1 (61). 2019. Pp. 68–81.
4. Saifullin R.T., Bochkarev A.V. Calculation of derivatives of the analytical signal in the basis of Chebyshev – Hermite functions. Materials of the XI All-Russian scientific conference with international participation "Mathematical modeling and boundary value problems" (May 27–30, 2019, Samara, Russia). Vol. 2. 2019. Pp. 137–139.

---

*Rauhat T. Sayfullin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.  
Andrey V. Bochkarev, Postgraduate Student.*

5. *Sayfullin R.T., Bochkarev A.V.* Calculation of the continuous wavelet transform of signals in the basis of Chebyshev – Hermit functions. Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Engineering, No. 2 (62). 2019. Pp. 113–124.
6. *Martens J.B.* The Hermite transform – theory. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1595–1606.
7. *Martens J.B.* The Hermite transform – applications. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1607–1618.
8. *Paveleva E.A., Krylov A.S.* Search and analysis of key points of the iris by the Hermite transformation method. Informatics and its applications. 2010. № 1 v. 4. Pp. 79–82.
9. *Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B.* The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition. LNCS, 2008. No. 5197. Pp. 86–93.
10. *Mamaev N.V.* The non-local average algorithm based on the expansion of Ermit functions in computed tomography problems. Mamaev N.V., Lukin A.S., Yurin D.V., Glazkova M.A., Sinitsin V.E. GRAPHICON'2013. Conference proceedings, 2013. Pp. 254–258.
11. *Gorlov V.A., Parshin D.S.* Expansion of a function with exponential growth in a Fourier series in orthogonal Chebyshev-Hermite polynomials. Actual directions of scientific research of the XXI century: theory and practice. 2015. Vol. 3. No. 8–3 (19–3). Pp. 245–248.
12. Neural network analysis and comparison of time-frequency vectors based on the short-term spectral representation and adaptive Hermite transform. Yu.M. Bayakovskiy, A.O. Zhirkov, D.N. Korchagin, A.S. Krylov, A.S. Lukin. Preprints IPM them. M.V. Keldysh, 2001, 087.
13. *Balakin D.A., Shtykov V.V.* Construction of an orthogonal filter bank based on Hermite transformations for signal processing. Journal of Radio Electronics, 2014, № 9. Pp. 1–15.
14. *Belenky B.G., Vilenchik L.Z.* Chromatography of polymers. M.: Chemistry, 1978. 334 p.
15. *Szego G.* Orthogonal polynomials. M.: Fizmatgiz, 1962. 500 p.
16. *Suetin P.K.* Classical orthogonal polynomials. M.: Fizmatlit, 2005. 480 s.
17. *Abramowitz M., Stigán I.* Reference for special functions. M.: Nauka, 1979. 832 p.
18. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Tables of integrals, sums, series and products. M.: Fizmatgiz, 1963. 1100 p.

УДК 621.317.33

## ИЗМЕРЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОМЕХИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППРОКСИМАЦИОННОГО МЕТОДА\*

*Е.Е. Ярославкина, А.В. Суслов, М.Ю. Козлов*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

**Аннотация.** Рассмотрен аппроксимационный метод определения эффективного значения периодического негармонического сигнала при наличии случайной помехи. Для решения поставленной задачи с целью оперативности получения результата используется обработка сигнала лишь на половине его периода. Предложенный метод базируется на параболической сплайн-аппроксимации дискретных значений сигнала. Определена погрешность сплайн-аппроксимации дискретных значений сигнала конкретного вида, а также погрешность аппроксимации при наличии случайной помехи с равномерным законом распределения. Приведен анализ погрешности определения рассмотренным методом эффективного значения, вызванной наличием случайной аддитивной помехи. Показано, что использование сплайн-функции снижает погрешность аппроксимации, вызванной случайной помехой. Определены характеристики рассмотренного метода при определении эффективных значений токов и напряжений промышленного силового электрооборудования. Рассмотрено использование предложенного метода при определении характеристик негармонического периодического сигнала с наличием третьей гармоники. Предложено использовать рассмотренный аппроксимационный метод измерения эффективного значения напряжения и тока мощного электрооборудования с целью оперативного определения его аварийных ситуаций.

**Ключевые слова:** эффективное значение, сплайн-аппроксимация, гармоника, дискретные значения, случайная помеха, промышленное электрооборудование.

### Введение

При эксплуатации мощного электрооборудования все более актуальной задачей становится оперативное определение его аварийных ситуаций. Наиболее надежным методом, используемым при решении этой задачи, является оперативный контроль таких интегральных характеристик, как эффективные значения напряжения и тока в цепях мощного электрооборудования, а также активной и реактивной мощности [1–6]. Аналогичные задачи необходимо решать и при управлении мощными нетрадиционными источниками электроэнергии, а также электроприводами гибридных транспортных средств [7].

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-08-00253, 16-08-00252).

*Ярославкина Екатерина Евгеньевна (к.т.н., доц.), заведующая кафедрой «Информационно-измерительная техника».*

*Суслов Антон Владимирович, магистрант.*

*Козлов Михаил Юрьевич, руководитель НОАП «Политехник НК».*



При этом возникают проблемы получения результатов диагностики и принятия решений в минимально возможные сроки. Эти проблемы обусловлены случайным характером и ограниченным объемом измерительной информации [1, 8, 9]. Для оперативного определения аварийных и предаварийных режимов работы силового электрооборудования требуется высокое быстродействие и точность измерения интегральных характеристик периодического сигнала. При этом особое значение имеют задачи измерения эффективного значения тока и напряжения в силовых цепях мощных электроустановок [2, 3].

В [3] применяется метод контроля эффективного значения тока и напряжения с использованием временного и пространственного разделения анализируемых сигналов. Это было успешно применено при разработке системы приемодаточных испытаний силовых трансформаторов [10] и системы контроля режима работы энергоагрегатов [5, 11]. Однако данный метод характеризуется значительной погрешностью при наличии высших гармоник в анализируемом сигнале.

Кроме того, для реализации вышеупомянутых методов необходимо использовать аналоговые фазовращатели, имеющие дополнительную погрешность при наличии высших гармоник в анализируемом сигнале.

В измерительных системах с использованием цифровых сигнальных процессоров прямое измерение может быть реализовано путем использования дискретных значений сигнала на количестве интервалов дискретизации, кратном периоду его первой гармоники. Недостатком такого метода является значительная погрешность при изменении основной частоты сигнала, в результате чего интервал дискретизации может не быть кратным ее периоду. К тому же при использовании цифровых методов при небольшом числе дискретных значений сигнала (порядка 6...10), а также при присутствии аддитивной случайной помехи погрешность определения эффективного значения сигнала может достигать значительной величины [12–14].

Аналогичные проблемы существуют и в трехфазных промышленных сетях. В таких приложениях возникают локальные искажения напряжения и тока, вызванные наличием высших гармоник определенного номера. Основное влияние здесь оказывают третья и кратные ей гармоники (девятая, пятнадцатая и т. д.), которые к тому же в линиях питания электрооборудования синфазны. Эти гармоники могут приводить к появлению токов в других нагрузках, подключенных к сети. В частности, эти гармоники зачастую приводят к появлению существенных токов в обмотках силового трансформатора или тока в нейтральном проводе. В некоторых случаях это может привести к перегрузке нейтрального провода и возникновению ошибки в системах учета потребляемой мощности [15]. В том случае, когда интервал времени измерения не включает целое число периодов, среднеквадратичное значение гармоник, а также связанные с ней мощности измеряются неправильно [16]. Эта ошибка отражается на точности измерения общих среднеквадратичных значений напряжений и токов, а также значений мощности. Ошибка также усугубляется тем фактом, что перекрестные произведения между межгармоническим током и гармоническими напряжениями (и наоборот) не позволяют определить мгновенные мощности с нулевым средним значением [17, 18].

Когда сигналы напряжения и тока сильно искажены, такие измерители характеризуются значительными погрешностями [19].

В связи с этим для контроля режима силового промышленного оборудования, особенно при появлении аварийных ситуаций, необходимо определять инте-

гральные характеристики (в основном эффективное значение напряжения и тока) в силовых цепях. При этом с целью высокой оперативности получения результатов время измерения таких характеристик не должно превышать половины периода сетевого напряжения питания электрооборудования.

### Постановка задачи

С целью снижения погрешности, вызванной наличием аддитивной случайной помехи, предлагается использовать аппроксимационный метод, сглаживающий влияние случайной помехи, наложенной на исследуемый сигнал.

### Аппроксимационный метод определения эффективного значения негармонического сигнала при отсутствии аддитивной случайной помехи

Рассмотрим метод определения эффективного значения измерительного сигнала с использованием его сплайн-аппроксимации.

На практике эффективное значение сигнала обычно определяется по его временной реализации  $y_c(t)$ .

В идеальном случае эффективное значение  $y_{eff}$  сигнала  $x_c$  равно

$$y_{eff}^{ideal} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x_c^2 dt} , \quad (1)$$

где  $T$  – период анализируемого сигнала.

Такое же значение  $y_{eff}$  можно получить с помощью (1), интегрируя квадрат сигнала на интервале  $0 \dots T$ , либо в связи с симметричностью анализируемого сигнала лишь на половине периода:

$$y_{eff}^{ideal} = \sqrt{\frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} [x_c(t)]^2 dt} . \quad (2)$$

В дальнейшем для оценки истинного значения  $y_{eff}$  будет использоваться выражение (2), поскольку при его реализации время определения эффективного значения сигнала при его частоте сети (50 Гц), питающей силовое электрооборудование, сокращается на время  $T/2=10\text{мс}$ .

### Теоретическая часть

Рассмотрим задачу определения эффективного значения сигнала по его дискретным значениям.

Внутри интервалов дискретизации сигнал может быть восстановлен с определенной погрешностью аппроксимирующей функцией. В этом случае для определения эффективного значения могут быть использованы коэффициенты аппроксимирующей функции.

Для аппроксимации дискретных значений сигнала  $U_c[n]$  предлагается использовать аппроксимирующую параболическую сплайн-функцию, которая на  $n$ -м интервале дискретизации описывается выражением

$$U_y(t) = b_2[n]t^2 + b_1[n]t + b_0[n] , \quad (3)$$

где  $b_2[n]$ ,  $b_1[n]$ ,  $b_0[n]$  – постоянные коэффициенты для  $n$ -го интервала.

Коэффициенты  $b_2[n]$ ,  $b_1[n]$ ,  $b_0[n]$  в (3) определяются по соответствующим выражениям для одного из цифровых сплайн-фильтров. Например, для пятиточечного параболического сплайн-фильтра эти выражения определяются соотношениями [20]

$$\left. \begin{aligned} b_0[n] &= \frac{1}{16}(-U_c[n-2] + 4U_c[n-1] + 10U_c[n] + 4U_c[n+1] - U_c[n+2]), \\ b_1[n] &= \frac{1}{8t_d}(U_c[n-2] - 6U_c[n-1] + 6U_c[n+1] - U_c[n+2]), \\ b_2[n] &= \frac{1}{16t_d^2}(-U_c[n-2] + 7U_c[n-1] - 6U_c[n] - 6U_c[n+1] + \\ &\quad + 7U_c[n+2] - U_c[n+3]). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При использовании коэффициентов (4) сплайн-аппроксимация  $b_c(t)$  дискретных значений сигнала определяется выражением

$$U_y(t) = \sum_{m=2}^{n+4} \left[ \begin{array}{l} b_2[n](t - nt_d)^2 + b_1[n](t - nt_d) + b_0[n] \text{ if } nt_d < t \leq (n+1)t_d \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right], \quad (5)$$

где  $t_d$  – интервал дискретизации сигнала  $U_c$ .

Параболическая сплайн-функция, как известно, не имеет разрывов на границах участков дискретизации по 0-й и 1-й производным, поэтому использование аппроксимирующих сплайнов практически не вызывает появления высших гармоник в спектре сигнала, восстановленного с помощью такой аппроксимации. Кроме того, цифровой фильтр, реализующий аппроксимационный алгоритм, обладает свойством сглаживания сигнала, на который наложена аддитивная помеха [21].

Выражение для второго начального момента сплайн-функции (то есть ее дисперсии) на одном интервале дискретизации имеет вид

$$\begin{aligned} b_{2x}[n] &= \frac{1}{T} \int_0^{t_d} (b_2[n]t^2 + b_1[n]t + b_0[n])^2 dt = \frac{t_d}{T} \left( b_2[n] \frac{t_d^4}{5} + b_2[n]b_1[n] \frac{t_d^3}{2} + \right. \\ &\quad \left. + b_1^2[n] \frac{t_d^2}{3} + b_0[n]b_2[n] \frac{2t_d^2}{3} + b_0[n]b_1[n]t_d + b_0^2[n] \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Если параболическая сплайн-аппроксимация периодического сигнала на его половине периода определена на  $m$  дискретных участках, то при интервале дискретизации  $t_d$  сигнала его дисперсия (на половине периода) определяется выражением

$$b_{2x} = \frac{t_d}{T} S_{\Sigma} = \frac{S_{\Sigma}}{m},$$

где  $m$  – число участков дискретизации сигнала,

$$S_{\Sigma} = \left[ \sum_{n=1}^m \frac{1}{5} b_2^2[n] \cdot t_d^4 + \frac{1}{2} b_1[n] b_2[n] \cdot t_d^3 + \frac{1}{3} b_1^2[n] \cdot t_d^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} b_0[n] b_2[n] \cdot t_d^2 + b_0[n] b_1[n] \cdot t_d + b_0^2[n] \right].$$

В этом случае дисперсия сигнала, определенная на его полном периоде, равна

$$b_{2x} = 2 \cdot \frac{S_{\Sigma}}{m} = \frac{2}{m} \cdot \left[ \sum_{n=1}^m \frac{1}{5} b_2^2[n] \cdot t_d^4 + \frac{1}{2} b_1[n] b_2[n] \cdot t_d^3 + \frac{1}{3} b_1^2[n] \cdot t_d^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} b_0[n] b_2[n] \cdot t_d^2 + b_0[n] b_1[n] \cdot t_d + b_0^2[n] \right]. \quad (7)$$

Отсюда можно определить эффективное значение сплайн-аппроксимации сигнала:

$$y_{eff\ spl} = \sqrt{b_{2x}}. \quad (8)$$

Как видно из выражений (4), для определения коэффициентов сплайн-аппроксимации сигнала  $x_c$  на его половине периода необходимо использовать два дополнительных дискретных участка слева от интервала аппроксимации (на половине периода сигнала), а также два дополнительных дискретных участка справа от интервала аппроксимации.

Таким образом, сплайн-аппроксимация сигнала определяется на дискретных значениях

$$[-2t_d, -t_d, 0, t_d, \dots (T/2+2t_d)].$$

Для определения эффективного значения негармонического сигнала в течение времени половины его периода необходимо реализовать выражения (4), (7) и (8) с помощью аналогового или микропроцессорного контроллера.

В качестве примера рассмотрим задачу определения эффективного значения сигнала  $x_c(t)$  частотой 50 Гц при наличии третьей гармоники:

$$x_c(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + A_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_3), \quad (9)$$

где  $A_1=1\text{В}$ ;  $A_3=0,2\text{В}$ ;  $\varphi_3=\pi/9$ .

График такого сигнала представлен на рис. 1.

График сплайн-аппроксимации такого сигнала, определенный с помощью (4), (5) на интервале  $[-2t_d, (T/2+2t_d)]$  при 10 участках аппроксимации, приведен на рис. 2.

График относительной погрешности ( $\delta_{анп}$ ) аппроксимации сигнала представлен на рис. 3. Как видно из рассмотрения этого графика, погрешность аппроксимации не превышает 1 %.

Истинная величина эффективного значения такого сигнала  $U_c$ , определяемая выражением (2), равна 0,721, а вычисленная помощью выражений (7) и (8) с использованием сплайн – аппроксимации сигнала, равна 0,72. Таким образом, погрешность определения эффективного значения сигнала составляет 0,2%.

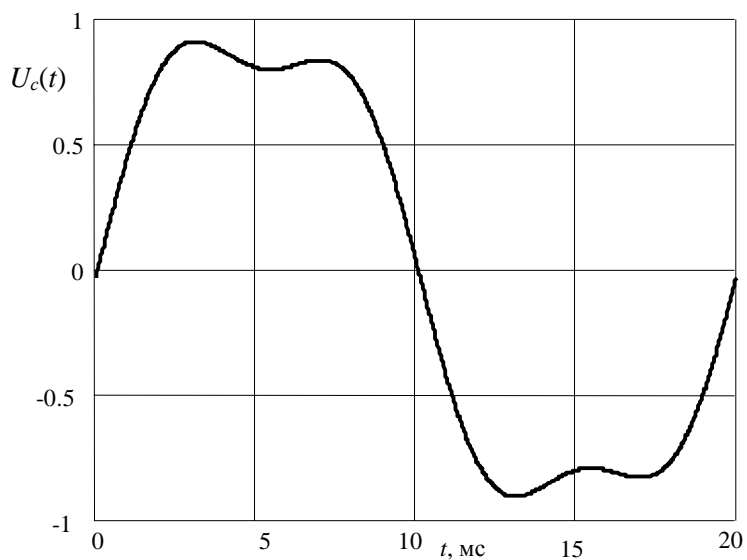


Рис. 1. График гармонического сигнала  $U_c(t)$  при наличии 3-й гармоники.

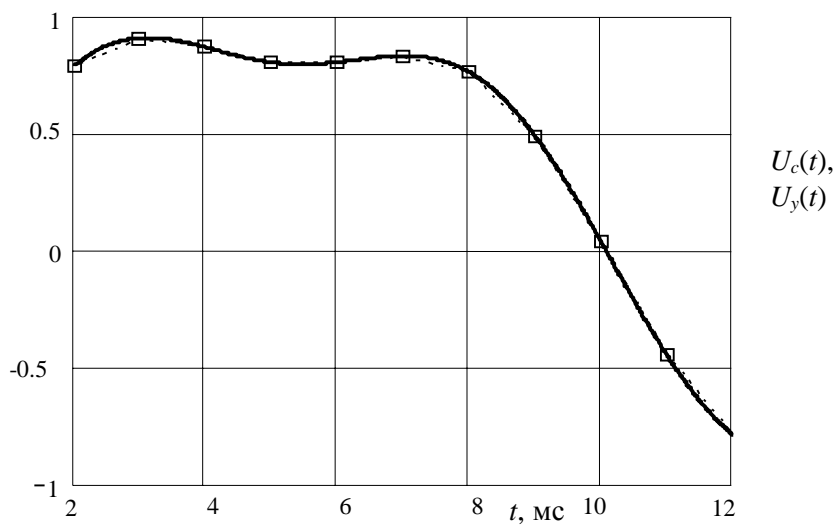


Рис. 2. Графики гармонического сигнала  $U_c(t)$  и его сплайн – аппроксимации  $U_y(t)$  на половине его периода:  
 — - сигнал,  $\square$  - сплайн – аппроксимация сигнала

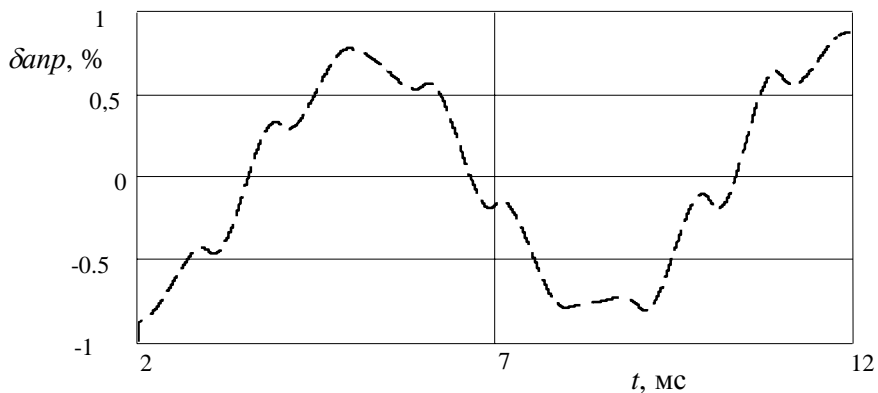


Рис. 3. График относительной погрешности сплайн - аппроксимации сигнала  $U_c(t)$

**Аппроксимационный метод определения эффективного значения негармонического сигнала при наличии аддитивной случайной помехи**

На практике представляет интерес задача определения эффективного значения негармонического сигнала, на который наложена аддитивная случайная помеха.

В качестве примера рассмотрим использование сплайн-аппроксимации дискретных значений сигнала  $U_c(t)$  (9) при наличии случайной помехи, распределенной по равномерному закону в интервале  $\pm 0,1$ .

График такого сигнала (с аддитивной помехой) представлен на рис. 4.

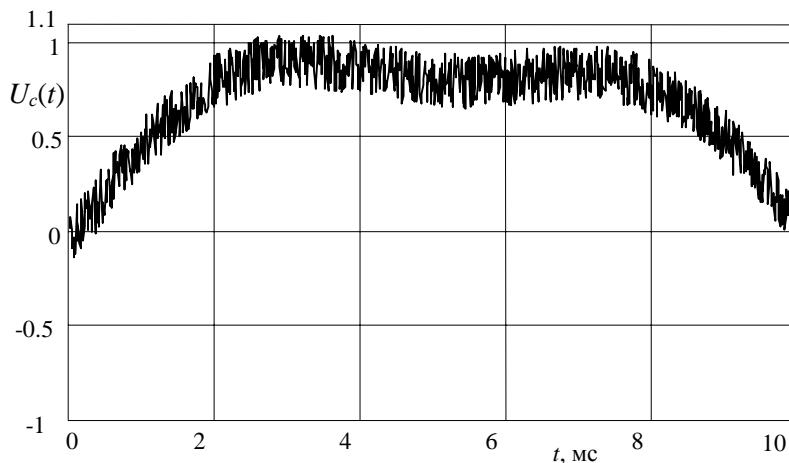


Рис. 4. График сигнала  $U_c(t)$  с помехой, распределенной в диапазоне  $\pm 0,1$  В

График самого сигнала  $U_c(t)$  (без помехи) и дискретные отсчеты  $U_c[n]$  сигнала с помехой представлены на рис. 5.

График сплайн-аппроксимации  $b_c(t)$  сигнала  $U_c(t)$  с помехой, построенный с использованием выражений (4) и (5), приведен на рис. 6.

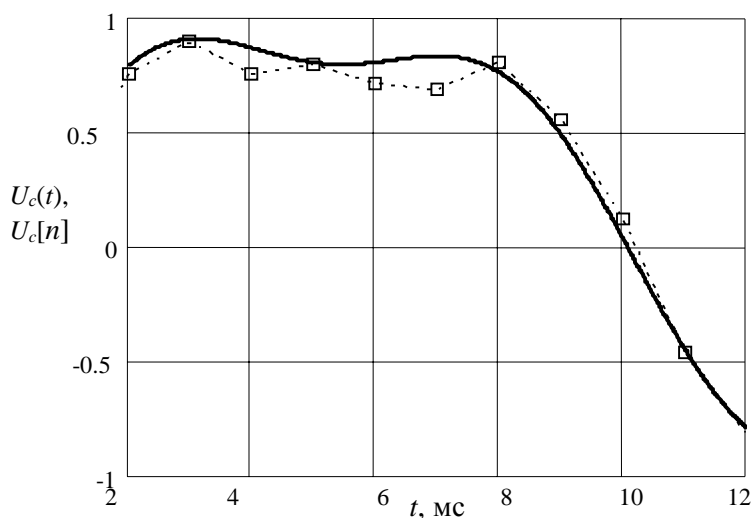


Рис. 5. График сигнала  $U_c(t)$  и дискретные отсчеты  $U_c[n]$  сигнала с помехой:  
 — график сигнала  $U_c(t)$  без помехи;  
 □□□ — дискретные отсчеты  $U_c[n]$  сигнала с 10 % помехой

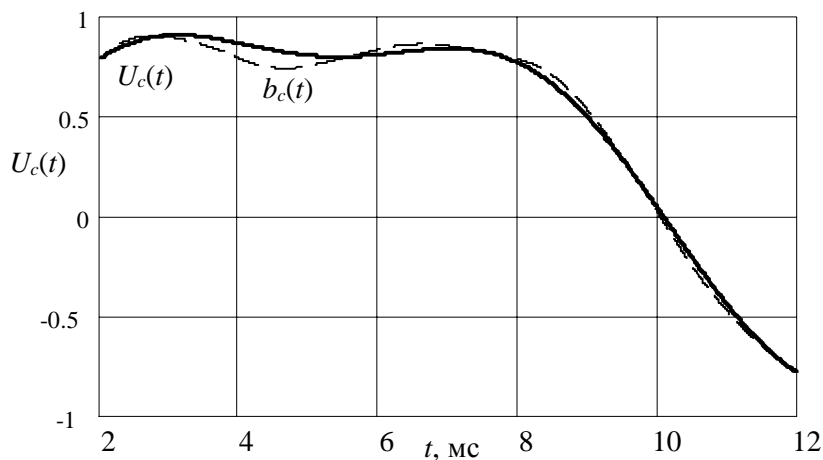


Рис. 6. График сплайн-аппроксимации  $b_c(t)$  сигнала  $U_c(t)$  с наложенной на него случайной помехой

### Результаты экспериментальных исследований

Представляет интерес сравнение погрешностей определения эффективного значения негармонического сигнала (9) при наличии аддитивной случайной помехи при использовании разных методов: погрешности  $\delta_i$  метода интегрирования (2), погрешности  $\delta_{spl}$  метода (4), (5) с использованием сплайн-аппроксимации и погрешности  $\delta_{sum}$  метода суммирования, определяемого выражением

$$y_{effsum} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+2} x^2[n]}. \quad (10)$$

Графики зависимостей этих погрешностей от размаха аддитивной случайной помехи для числа участков аппроксимации на половине периода анализируемого сигнала  $m=10$  представлены на рис. 7.

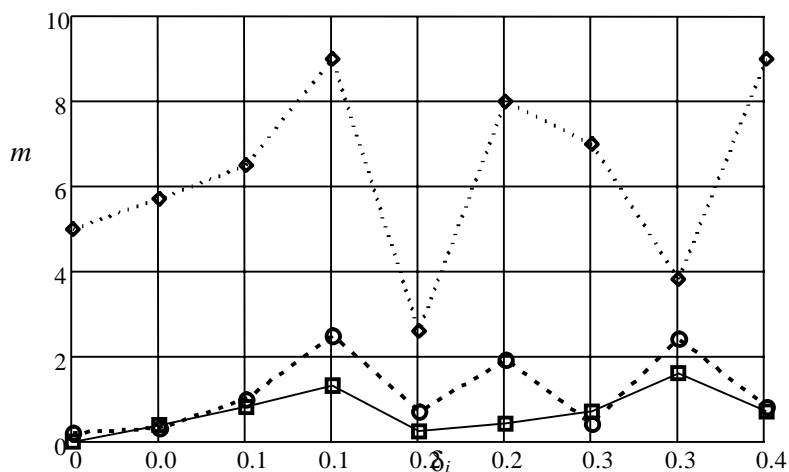


Рис. 7. Зависимости относительной погрешности определения эффективного значения негармонического сигнала при наличии случайной помехи от ее размаха для разных методов при 10 участках дискретизации:

■ ■ ■ – для метода интегрирования (2); ○ ○ ○ – для метода с использованием сплайн-аппроксимации (4), (5); · · ◆ – для метода суммирования (10)

Графики аналогичных зависимостей при 8 участках аппроксимации на половине периода анализируемого сигнала представлены на рис. 8, а при 6 участках аппроксимации – на рис. 9.

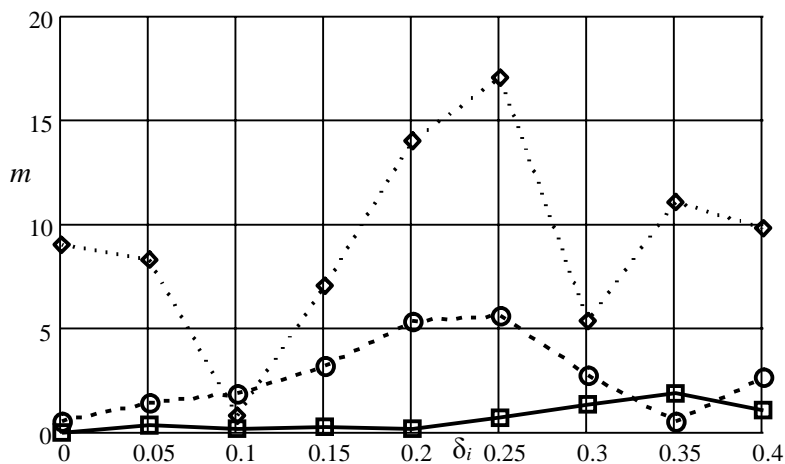


Рис. 8. Зависимости относительной погрешности определения эффективного значения негармонического сигнала при наличии случайной помехи от ее размаха для разных методов при 8 участках дискретизации:

■ ■ ■ – для метода интегрирования (1),  
 ○ ○ ○ – для метода с использованием сплайн – аппроксимации (3), (4),  
 · · ◆ – для метода суммирования (8)



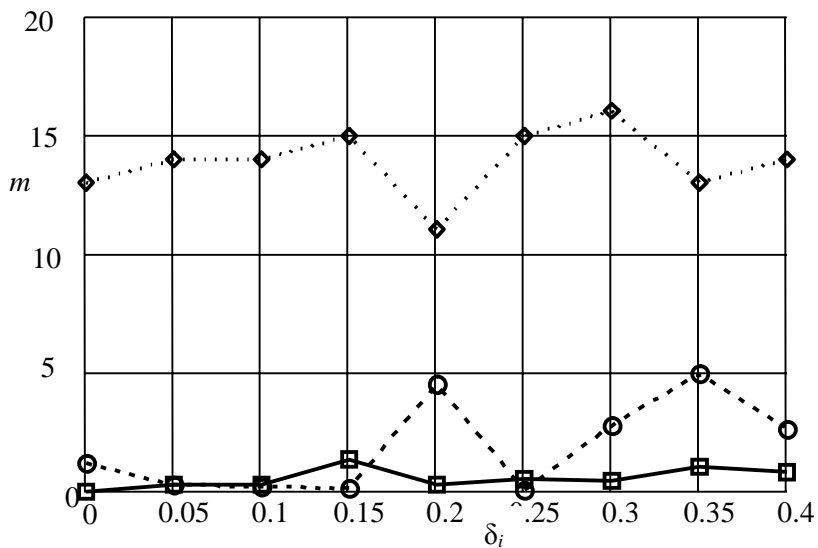


Рис. 9. Зависимости относительной погрешности определения эффективного значения негармонического сигнала при наличии случайной помехи от ее размаха для разных методов при 6 участках дискретизации:

- - для метода интегрирования (2),
- - для метода с использованием сплайн – аппроксимации (4), (5),
- ◇ - для метода суммирования (10)

Как видно из рассмотрения приведенных графиков, метод определения эффективного значения негармонического сигнала в присутствии аддитивной помехи по величине погрешности практически не уступает методу интегрирования и превосходит метод суммирования, особенно при малом числе интервалов дискретизации на половину периода анализируемого сигнала. Это объясняется свойством сглаживания сигнала цифровым фильтром (4), реализующим сплайн-аппроксимацию дискретных значений сигнала.

### Выводы

С целью снижения погрешности определения эффективного значения негармонического сигнала при высоких требованиях к оперативности его определения целесообразно использовать сплайн-аппроксимацию дискретных значений сигнала на половине периода сигнала.

При отсутствии аддитивной помехи сплайн-аппроксимация позволяет восстановить форму негармонического сигнала внутри дискретных интервалов с достаточно малой погрешностью.

При наличии аддитивной случайной помехи высокого уровня (20...40 % от амплитуды первой гармоники) сплайн-аппроксимация позволяет восстановить форму негармонического сигнала внутри дискретных интервалов с погрешностью, допустимой для ее практического применения.

Аппроксимационный метод определения эффективного значения негармонического сигнала при наличии аддитивного случайного шума путем его обработки на половине периода характеризуется погрешностью меньшей, чем по-

грешность обычного метода суммирования квадратов дискретных значений сигнала, особенно при небольшом числе (6...8) дискретных отсчетов сигнала.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. IEEE 1459-2000 – IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. The Institute of Electrical and Electronic Engineers Inc. New York, USA, Approved 2 February 2010.
2. Батищев В.И., Мелентьев В.С., Иванов Ю.М. Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики: монография. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Инновационное машиностроение, 2018. – 461 с. ISBN 978-5-9908302-1-9.
3. Ланге П.К., Ярославкина Е.Е. Аппроксимационные методы и средства обработки измерительных сигналов. Lambert Academic Publishing, Düsseldorf, Germany, 2017. 236 с.
4. Yaroslavkina E.E. Investigation of methods for determining the integral characteristics of periodic signals separated in time. In Proceedings of International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern technologies (Far East Con 2018), Vladivostok, 2018. pp. 1.
5. Melent'ev V.S., Ivanov Y.M., Lychev A.O. A method of measuring integral characteristics from the instantaneous values of signals separated in time and space. Measurement techniques, Springer US, December 2014, Volume 57, Issue 9, pp. 979–983.
6. Muratova V.V., Yaroslavkina E.E., Orlov S.P. Information-Measuring System for Rapid Determination of Power Electrical Equipment Parameters // 2019 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). IEEE Xplore. Publisher IEEE, 2019. P. 1 – 4.
7. Antonio Zecchino, Mattia Marinelli. Analytical assessment of voltage support via reactive power from new electric vehicles supply equipment in radial distribution grids with voltage-dependent loads. Electrical Power and Energy Systems. 97 (2018). Pp. 17–27.
8. ГОСТ Р 54149-2010 (EN 50160:2010, NEQ). Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. Введ. 2013-01-01. – М.: Стандартинформ, 2012. – 20 с.
9. ГОСТ IEC 61000-4-30-2017 (IEC 61000-4-30:2015, IDT). Электромагнитная совместимость (ЭМС). Часть 4–30. Методы испытаний и измерений. Методы измерений качества электрической энергии. Введ. 2018-12-01. – М.: Стандартинформ, 2018. – 61 с.
10. Мелентьев В.С., Ярославкина Е.Е. Информационно-измерительная система для электромагнитных испытаний силовых трансформаторов // Известия вузов. Электромеханика. – 2008. – № 6. – С. 18–21.
11. Серов А.Н., Луначев А.А. Расширение возможности имитационного моделирования сигналов реальных электрических сетей для повышения точности методики измерения параметров // Южно-Сибирский научный вестник. – 2015. – № 1(9). – С. 57–62.
12. Karandaev A.S., Yachikov I.M., Khramshin V.R. Methods of Multi-Parameter Diagnostics of Electric Equipment Condition Within On-Line Monitoring Systems. Procedia Engineering, 150 (2016). Pp. 32–38.
13. Yakimov V.N. Digital harmonic analysis of multicomponent random processes. Measurement techniques, Springer US, New York, April 2006, Vol. 49, Issue 4. Pp. 341–347.
14. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the amplitude spectrum evaluating system for multicomponent processes. Instruments and experimental techniques, Springer US, New York, September 2013, Vol. 56, Issue 5. Pp. 540–545.
15. Cepisca C., Ganatsios S., Andrei H., Grigorescu S.D., Taousanidis N. Methods for power measurement in energy meters. The Scientific Bulletin of the Electrical Engineering Faculty, 2008. No. 2. Pp. 7–11.
16. Peretto L., Willems J.L., Emanuel A.E. The effect of the integration interval on the measurement accuracy of rms values and powers in systems with non-sinusoidal wave forms. Electrical Power Quality and Utilisation Journal. vol. 13. no. 1. 2007. Pp. 111–117.
17. Georgios C. Kryonidis, Charis S. Demoulias, Grigoris K. Papagiannis. A new voltage control scheme for active medium-voltage (MV) networks. Electric Power Systems Research, 169 (2019). Pp. 53–64.
18. Daniel Morinigo-Sotelo, Roque Alfredo Osornio-Rios, Luis Morales-Velazquez, Rene de Jesus Romero-Troncosob, Gilberto Herrera-Ruiz. Smart sensor network for power quality monitoring in electrical installations. Measurement 103 (2017). Pp. 133–142.
19. Cataliotti A., Cosentino V., Nuccio S. The measurement of reactive energy in polluted distribution power systems: an analysis of the performance of commercial static meters. IEEE Transactions on Power Delivery. vol. 23. no. 3. July 2008. Pp. 1296–1301.

20. Ланге П.К. Сплайн-аппроксимация дискретных значений сигналов с применением методов цифровой фильтрации // Сб. труд. Самарского гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. – 2003. – Вып. 19. – С. 134–138.

*Статья поступила в редакцию 4 сентября 2019 года*

## **PERIODIC NON-HARMONIC SIGNAL EFFECTIVE VALUE MEASUREMENT IN THE PRESENCE OF RANDOM NOISE USING THE APPROXIMATION METHOD**

*E.E. Yaroslavkina, A.V. Syslov, M.U. Kozlov*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

**Abstract.** The paper describes an approximation method for determining the effective value of a periodic non-harmonic signal in the presence of random noise. To solve the problem for quickly result obtaining, signal processing is used for only half of its period. The proposed method is based on a parabolic spline approximation of discrete signal values. The error of the signal discrete values spline approximation is determined, as well as the error in the presence of random noise with a uniform distribution law. The analysis of the error of effective value determination by the considered method caused by the presence of random additive noise is presented. It is shown that the use of the spline function reduces the approximation error caused by random noise. The characteristics of the method considered are studied, as well the effective values of currents and voltages of the industrial power electrical equipment are determined. The use of the proposed method in determining the effective value of a non-harmonic periodic signal with the presence of a third harmonic is considered. It is proposed to use the considered approximation method for measuring the effective value of voltage and current of powerful electrical equipment in order to quickly determine its emergency situations.

**Keywords:** effective value, spline approximation, harmonic, discrete values, random noise, industrial electrical equipment.

### REFERENCES

1. IEEE 1459-2000 – IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. The Institute of Electrical and Electronic Engineers Inc. New York, USA, Approved 2 February 2010.
2. *Batishhev V., Melentjev V., Ivanov Ju.* Approximation methods and systems for industrial measurement, control, testing, diagnostics. – 2nd edition – M.: Innovative engineering. - 2018. – 461 p. (in Russian)
3. *P.K Lange, E.E Yaroslavkina,* “Approximation methods and tools for measuring data acquisition”. Lambert Academic Publishing. – Düsseldorf. - Germany., 2017., p. 236 (in Russian)
4. *Yaroslavkina E.E.* Investigation of methods for determining the integral characteristics of periodic signals separated in time. In Proceedings of International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern technologies (FarEastCon2018), Vladivostok, 2018, pp.1-
5. *Melent'ev V.S., Ivanov Y.M., Lychev A.O.* A method of measuring integral characteristics from the instantaneous values of signals separated in time and space.

---

*Ekanerina E. Yaroslavkina (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.  
Anton V. Suslov, Graduate Student.  
Michail U. Kozlov, Director.*

- Measurement techniques, Springer US, December 2014, Vol. 57, Issue 9, pp. 979-983.
6. *Muratova V.V., Yaroslavkina E.E., Orlov S.P.* Information-Measuring System for Rapid Determination of Power Electrical Equipment Parameters // 2019 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). IEEE Xplore. Publisher IEEE, 2019. P. 1 – 4.
  7. *Antonio Zecchino, Mattia Marinelli.* Analytical assessment of voltage support via reactive power from new electric vehicles supply equipment in radial distribution grids with voltage-dependent loads. *Electrical Power and Energy Systems*, 97 (2018), pp. 17-27.
  8. GOST P 54149-2010 (EN 50160:2010, NEQ). Electric energy. Electromagnetic compatibility of technical equipment. Power quality limits in the public power supply systems, 2013-01-01. M.: Standartinform, 2012, 20 p.
  9. GOST IEC 61000-4-30-2017 (IEC 61000-4-30:2015, IDT). Electromagnetic compatibility (EMC). Part 4-30. Testing and measurement techniques. Power quality measurement methods, 2018-12-01. M.: Standartinform, 2018, 61 p.
  10. *Melent'ev V.S., Yaroslavkina E.E.* Information and measuring system for electromagnetic tests of power transformers//News of universities. *Electromechanics*. 2008, Vol. 6, pp. 18-21.
  11. *Serov A.N., Lupachev A.A.* Modelling features of electric network signals for the assessment of metrological characteristics of power parameters measurement methods// *South-Siberian Scientific Bulletin*. 2015. № 1(9). pp. 57-62.
  12. *A.S. Karandaev, I.M. Yachikov, V.R. Khramshin.* Methods of Multi-Parameter Diagnostics of Electric Equipment Condition Within On-Line Monitoring Systems. *Procedia Engineering*, 150 (2016), pp. 32-38.
  13. *Yakimov V.N.* Digital harmonic analysis of multicomponent random processes. *Measurement techniques*, Springer US, New York, April 2006, Vol. 49, Issue 4, pp. 341-347.
  14. *Yakimov V.N., Gorbachev O.V.* Firmware of the amplitude spectrum evaluating system for multicomponent processes. *Instruments and experimental techniques*, Springer US, New York, September 2013, Vol. 56, Issue 5, pp. 540-545.
  15. *Cepisca C., Ganatsios S., Andrei H., Grigorescu S.D., Taousanidis N.* Methods for power measurement in energy meters. *The Scientific Bulletin of the Electrical Engineering Faculty*, 2008. No. 2. pp. 7-11.
  16. Peretto L., Willems J.L., Emanuel A.E. The effect of the integration interval on the measurement accuracy of rms values and powers in systems with non-sinusoidal wave forms/ *Electrical Power Quality and Utilisation Journal*. vol. 13. no. 1. 2007. pp. 111-117.
  17. *Georgios C. Kryonidis, Charis S. Demoulias, Grigoris K. Papagiannis.* A new voltage control scheme for active medium-voltage (MV) networks. *Electric Power Systems Research*, 169 (2019), pp. 53-64.
  18. *Daniel Morinigo-Sotelo, Roque Alfredo Osornio-Rios, Luis Morales-Velazquez, Rene de Jesus Romero-Troncoso, Gilberto Herrera-Ruiz.* Smart sensor network for power quality monitoring in electrical installations. *Measurement* 103 (2017). Pp. 133-142
  19. Cataliotti A., Cosentino V., Nuccio S. The measurement of reactive energy in polluted distribution power systems: an analysis of the performance of commercial static meters. *IEEE Transactions on Power Delivery*. vol. 23. no. 3. July 2008. pp. 1296-1301.
  20. Lange P. Spline - approximation of signals discrete samples using digital filtering methods. *Journal of the Samara State technical university. Series "Phys.-Math. Science"*. Samara. No. 19, 2003. - pp.134-138 (in Russian)