

# Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы

УДК 621.317

## АВТОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ РОТАЦИОННЫМ ВИСКОЗИМЕТРОМ ТИПА ВРЦ

*О.Г. Корганова, В.А. Кузнецов*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

***Аннотация.** Для определения вязкости при заданной температуре используются вискозиметры различных типов, чаще всего ротационные. Эти вискозиметры нуждаются в стабилизации частоты вращения измерительного ротора и применении термостатов, так как вязкость сильно зависит от температуры. Предлагается метод измерения вязкости, лишенный этих недостатков. Вискозиметр содержит два канала: канал измерения вязкости и канал измерения температуры. Вращение измерительного ротора осуществляется приводом через калиброванную пружину, угол закручивания которой пропорционален крутящему моменту и преобразуется в широтно-импульсный сигнал. Микроконтроллер производит анализ и измерение ШИМ-сигнала и напряжения, пропорционального температуре, преобразует их в цифровой код, выдает результаты на дисплей и через порт выводит информацию о вязкости и температуре в цифровом виде. Предложенный алгоритм обработки измерительной информации исключает необходимость в стабилизации частоты вращения измерительного ротора.*

***Ключевые слова:** вязкость, ротационный метод измерения, микроконтроллер, повышение точности измерения.*

Технология производства некоторых видов продукции связана с необходимостью измерения динамической вязкости, являющейся или промежуточным, или конечным параметром этой продукции. Во многих случаях значение вязкости определяет и качество продукции.

Большинство вискозиметров, предназначенных для измерения динамической вязкости, отличаются сложностью конструкции, так как нуждаются в стабилизации частоты вращения измерительного ротора, большими затратами времени на температурную подготовку исследуемого образца, для чего применяются термостаты, и невысокой точностью измерения [1]. Кроме того, зарубежные вискозиметры, например фирмы Brookfield, имеют высокую стоимость [2].

---

*Корганова Ольга Георгиевна (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационно-измерительная техника».*

*Кузнецов Владимир Андреевич (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационно-измерительная техника».*

Предлагается новый алгоритм обработки измерительной информации ротационного метода измерения вязкости, позволивший упростить конструкцию вискозиметра, исключить применение термостата и сократить затраты времени на измерение вязкости при заданной температуре [3].

Известно, что в основе методов измерения динамической вязкости лежит закон Ньютона [4]. Сила, приложенная к измерительному ротору, для ньютоновских жидкостей определяется выражением

$$F = \eta \frac{\omega S}{h}, \quad (1)$$

где  $\eta$  – вязкость исследуемой жидкости;  
 $\omega$  – угловая скорость вращения ротора;  
 $S$  – рабочая площадь ротора;  
 $h$  – толщина слоя жидкости.

Из (1) видно, что вязкость может быть определена по силе, приложенной к измерительному ротору, при стабилизации остальных параметров, входящих в это выражение. На практике удобнее измерять не силу, а крутящий момент, приложенный к измерительному ротору:

$$M = F R,$$

где  $R$  – радиус измерительного ротора.

С учетом (1) и связи между угловой скоростью и частотой вращения измерительного ротора выражение для крутящего момента примет вид

$$M = \eta \frac{2 \pi n S R^2}{h}, \quad (2)$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость;  
 $n$  – частота вращения измерительного ротора;  
 $S$  – площадь рабочей поверхности ротора;  
 $R$  – радиус ротора;  
 $h$  – толщина слоя жидкости между боковыми поверхностями ротора и измерительного цилиндра.

Выражение (2) положено в основу работы большинства современных вискозиметров. Вязкость определяется по алгоритму [5]

$$\eta = \frac{h}{2 \pi n S R^2} M. \quad (3)$$

Недостаток этого метода измерения связан с тем, что крутящий момент, по которому определяется вязкость, зависит не только от этой вязкости, но и от частоты вращения  $n$  измерительного ротора, что приводит к необходимости стабилизации этого параметра и усложнению конструкции прибора.

Разработанная конструкция измерительного преобразователя позволила алгоритмически устранить этот недостаток и создать вискозиметр, инвариантный к частоте вращения измерительного ротора [6].

На рис. 1 представлена структурная схема разработанного прибора для измерения динамической вязкости.

Вращение измерительного ротора (ИР) осуществляется приводом (ИП) через калиброванную измерительную пружину (ИП). Диски с метками (ДМ) насажены

соответственно на оси привода и измерительного ротора, поэтому при вращении измерительного ротора в исследуемой жидкости (ИЖ) диск на измерительном роторе отстает от диска на приводе вследствие вязкого трения. Угол закручивания измерительной пружины пропорционален крутящему моменту, если пружина работает в пределах линейной зоны деформации [7].

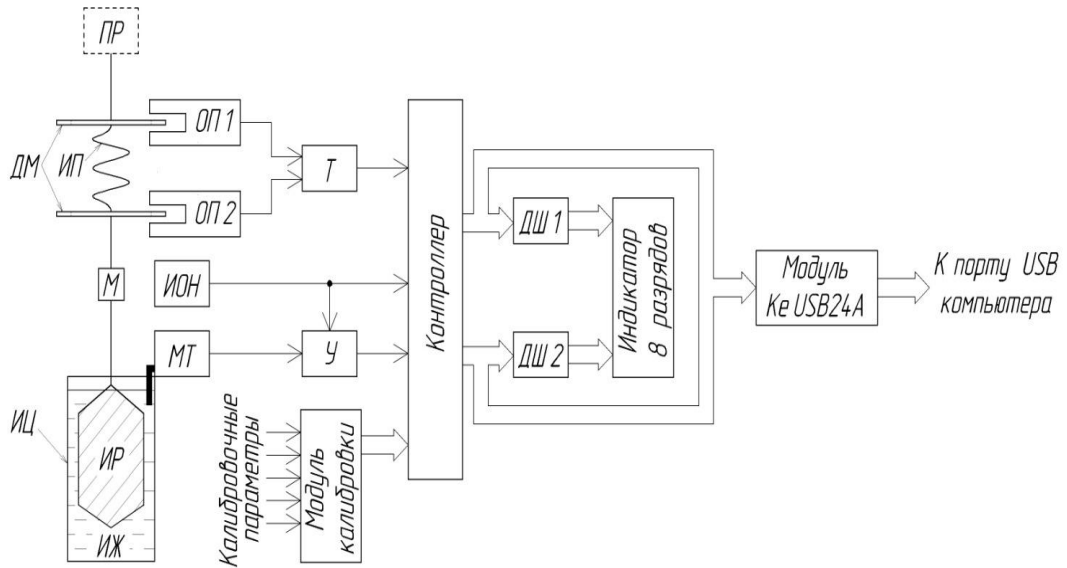


Рис. 1. Структурная схема ротационного вискозиметра

Независимость результата измерения вязкости от частоты вращения измерительного ротора достигается следующим образом [8].

В дисках выполнены радиальные прорезы, через которые проходит свет оптопар. При прохождении каждой прорезы внутри оптопары генерируется электрический импульс, поступающий на вход триггера Т [9].

Угол закручивания измерительной пружины определяется выражением

$$\alpha = \frac{1}{K_{\text{п}}} M, \quad (4)$$

где  $K_{\text{п}}$  – коэффициент жесткости пружины;

$M$  – крутящий момент, определяемый выражением (2).

При закручивании пружины электрические импульсы оптопар сдвигаются относительно друг друга на время  $\tau$  :

$$\tau = \frac{T}{2\pi} \alpha = \frac{\alpha}{2\pi n}. \quad (5)$$

Здесь:  $T$  – период вращения измерительного ротора;

$n$  – частота вращения измерительного ротора.

Отсюда

$$\tau = \frac{M}{2\pi n K_{\text{п}}}. \quad (6)$$

Подставляя (2) в (5), получим:

$$\tau = \frac{M}{2\pi n K_{\Pi}} = \frac{\eta 2\pi n S R^2}{h 2\pi n K_{\Pi}} = \frac{n S R^2}{h K_{\Pi}}. \quad (7)$$

Из (7) находится алгоритм определения вязкости:

$$\eta = \frac{h 2\pi n K_{\Pi} \tau}{2\pi n S R^2} = \frac{h K_{\Pi}}{S R^2} \tau. \quad (8)$$

Из этого выражения видно, что вязкость однозначно определяется по интервалу времени  $\tau$ , а из алгоритма измерения исключено значение частоты вращения измерительного ротора  $n$ .

Интервал времени  $\tau$  формируется триггером Т и поступает на вход микроконтроллера, который с помощью встроенного АЦП преобразует его в цифровой вход.

Разработанный способ измерения вязкости позволил в качестве электропривода использовать малогабаритные двухфазные синхронные электродвигатели переменного тока без стабилизации частоты вращения и одновременно снизить погрешность измерения вязкости.

Для обеспечения высокой точности измерения вязкости необходимо выполнить условие

$$\frac{h K_{\Pi}}{S R^2} = const.$$

Точность измерения вязкости зависит от стабильности геометрических размеров  $h, S, R$  и коэффициента жесткости пружины  $K_{\Pi}$ . Особое внимание уделяется стабилизации коэффициента жесткости пружины, которая в процессе изготовления подвергается закалке и термотренировке. Из геометрических параметров наибольшее влияние на точность измерения вязкости оказывает нестабильность радиуса ротора, значение которого входит в функцию преобразования в квадрате.

Микроконтроллер производит анализ и измерение ШИМ-сигнала и напряжения, пропорционального температуре, преобразование их в цифровой код, сдвиг нуля и масштабирование. В итоге на восьмиразрядный семисегментный цифровой индикатор через дешифраторы ДШ1 и ДШ2 выдаются в динамическом режиме результаты измерения температуры и вязкости. Через ДШ1 передается двоично-десятичный код результата, а через ДШ2 – адрес подсвечиваемого разряда. При необходимости результаты измерения можно передать на компьютер через схему сопряжения, выполненную на типовом модуле KeUSB24A, который связывает микроконтроллер с компьютером через линии USB. Для выполнения сервисных операций, таких как сдвиг «нуля» и изменение чувствительности, используется модуль калибровки, связанный с микроконтроллером по пяти линиям ввода данных. Это линии выбора «температура/вязкость», фиксирования «нуля», увеличения и уменьшения коэффициента чувствительности и фиксирования «чувствительности». На рис. 2 приведен алгоритм работы микроконтроллера. При подаче питания или сигнала начального сброса микроконтроллер осуществляет:

1. Запрет прерывания и настройка указателя стека.
2. Настройка таймера для работы на режим переполнения от внутреннего ге-

нератора. В случае переполнения таймера формируется сигнал прерывания, который вызывает программу обработки прерывания.

3. Конфигурация портов.

4. Задание начальных значений переменным. Некоторым переменным значения присваиваются непосредственно, значения начальных сдвигов и коэффициентов чувствительности температуры и вязкости загружаются из энергонезависимой памяти (EEPROM).

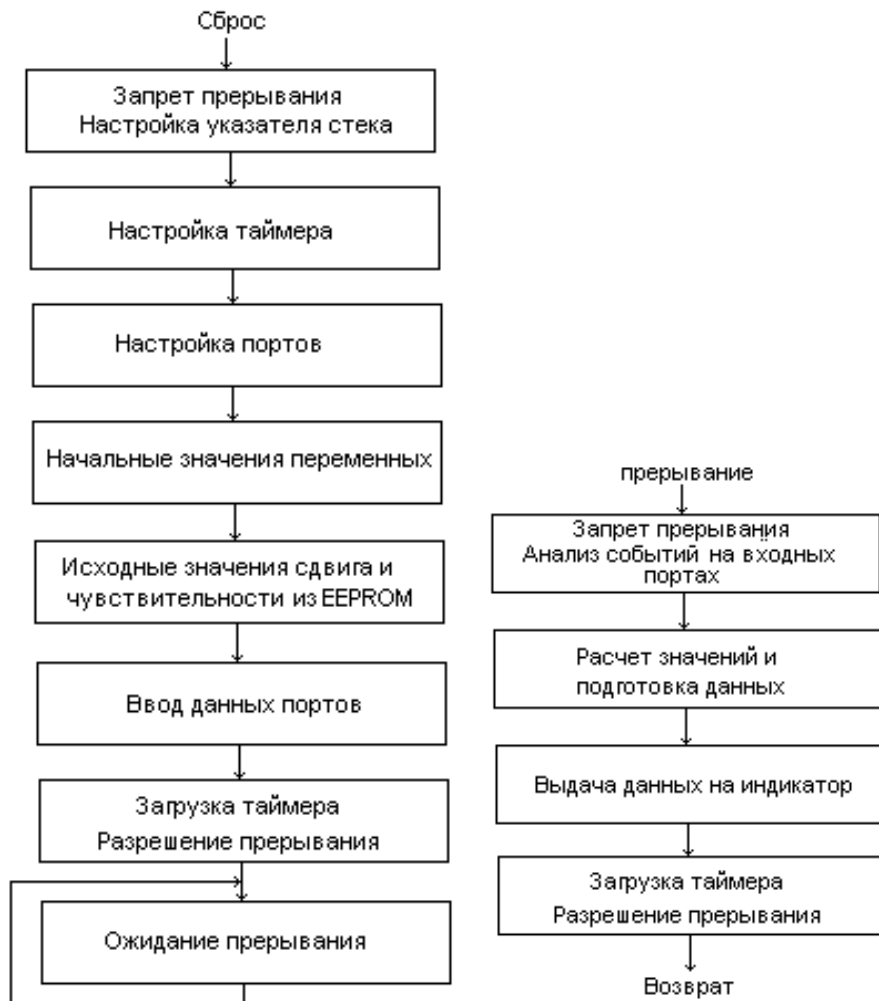


Рис. 2. Алгоритм работы микроконтроллера

5. Считывание данных состояния портов ввода. Необходимо для анализа событий на входных портах микроконтроллера в программе прерывания.

6. Загрузка начального значения в таймер. Величина начального значения определяет интервал времени, через который таймер переполнится и вызовет программу обработки прерывания.

7. Разрешение прерывания. После этого микроконтроллер не выполняет никаких действий и переходит в состоянии ожидания прерывания.

Программа обработки прерывания производит следующие действия:

1. Анализ событий на входных портах микроконтроллера и соответствующая реакция на каждое событие. В процессе анализа считывается текущее состояние портов и сравнивается с предыдущим, которое считано во время предшествующего прерывания или при начальном запуске программы. Для порта, на который подается ШИМ-сигнал, анализ позволяет выделить передний и задний фронты ШИМ-сигнала. Для портов, обслуживающих модуль калибровки обеспечить команды установки «нуля» и «чувствительности», увеличение/уменьшение чувствительности и идентифицировать канал, по которому производятся действия по калибровке.

2. Расчетные операции выполняются в зависимости от событий на входных портах. Исходные данные для расчета вязкости – это число импульсов прерывания, подсчитанных между разноименными фронтами ШИМ-сигнала. Подсчет числа импульсов между передним и задним фронтами дает информацию о величине, пропорциональной динамической вязкости, между одноименными фронтами – о величине, обратно пропорциональной динамическому сдвигу. После усреднения подсчитанных данных за известное число оборотов измерительного ротора производятся арифметические операции сдвига «нуля», масштабирования и подготовки данных для выдачи на цифровой индикатор. При обнаружении некоторых событий, связанных с модулем калибровки, расчетные операции заканчиваются записью в EEPROM новых значений «нуля» и коэффициента чувствительности. После каждой записи новых калибровочных значений программа принудительно «зависает». Это сделано специально, т. к. время выполнения длительных операций с EEPROM может превысить интервал прерывания. Кроме того, это служит дополнительным напоминанием о том, чтобы после изменения чувствительности не забыли выполнить операцию записи нового коэффициента в EEPROM (операции увеличения и уменьшения коэффициента чувствительности производятся в оперативной памяти). После зависания программы гаснет индикация и необходимо выключить и заново включить прибор, а при начальном сбросе новые значения «нуля» и коэффициента чувствительности извлекаются из EEPROM.

3. Выдача данных из микроконтроллера на индикатор. Таким образом, динамическая индикация выполняется с частотой прерывания микроконтроллера.

4. Восстановление начального значения таймера и переход в режим ожидания прерывания.

Выполнение всех этих действий происходит за время, меньшее времени переполнения таймера, которое задается при его настройке, т. к. длительные операции с EEPROM не используются, поэтому частота прерываний является стабильной и используется как опорная для измерения параметров ШИМ-сигнала. Операция по аналого-цифровому преобразованию напряжения, пропорционального температуре, выполняется при каждом прерывании, однако на индикатор передается сдвинутое и отмасштабированное усредненное значение. Время усреднения температуры меньше времени усреднения вязкости, поэтому значения температуры на индикаторах обновляются чаще, чем значения вязкости.

Вязкость жидкостей сильно зависит от температуры, в связи с чем она измеряется при заданной температуре. Эта температура обычно поддерживается с помощью термостата, что приводит к большим затратам времени на подготовку исследуемого вещества. В вискозиметре ВРЦ используется другой способ.

Вискозиметр автоматически производит измерение вязкости при достижении

исследуемой жидкостью заданной температуры в процессе ее остывания, что позволяет не использовать термостат и сократить время термоподготовки жидкости.

Заданная температура вводится в память микроконтроллера заранее и может быть перестроена пользователем.

Вискозиметр имеет порт вывода информации о вязкости и температуре в цифровом виде для передачи ее в ЭВМ.

В состав прибора входят:

1) измерительный блок, представляющий собой стойку, на которой расположены двигатель с редуктором, измерительная пружина, диски с фотодатчиками, электронный блок;

2) ротор и измерительный стакан с закрепленным на нем малоинерционным термометром;

3) ноутбук, соединенный с измерительным блоком по линиям USB (только для ВРЦ);

4) эталонная жидкость для калибровки.

Для прибора ВРЦ разработана программа (под WinXP), с помощью которой все результаты измерения и калибровки выводятся на экран, снабжаются значениями времени и заносятся в архив.

Основные технические характеристики вискозиметра типа ВРЦ приведены в таблице.

#### Основные технические характеристики вискозиметра типа ВРЦ

Показатель	Значение
Диапазон измерения вязкости, Па·с (Пуаз)	2...100 (20...1000)
Диапазон измерения температуры, °С	0...100
Основная приведенная погрешность измерения вязкости, %	2,5
Абсолютная погрешность измерения температуры, °С	0,5
Напряжение питания, В(АС)	220
Габариты в рабочем положении, мм	270×200×460
Масса прибора, кг	10

Перспективным направлением развития вискозиметрии является применение микроконтроллера для повышения точности измерения вязкости, в частности для исключения погрешностей, связанных с нестабильностью параметров, входящих в формулу (4). Точность измерения может быть повышена алгоритмическими методами [10, 11, 12].

На рис. 3 представлена структурная схема ротационного вискозиметра повышенной точности [3]. В основу работы вискозиметра положены тестовые методы повышения точности измерения.

Исследуемой жидкостью ИЖ заполняется неподвижный стакан, в который помещается вращающийся измерительный ротор ИР. Измерительный ротор приводится во вращение электродвигателем ЭД через редуктор Р. При вращении ротора в исследуемой жидкости возникает тормозной момент, который пропорционален вязкости жидкости:

$$M_T = K_p n \eta,$$

где  $K_p$  – конструктивный коэффициент, зависящий от размеров стакана и ротора;

$n$  – частота вращения ротора;

$\eta$  – динамическая вязкость.

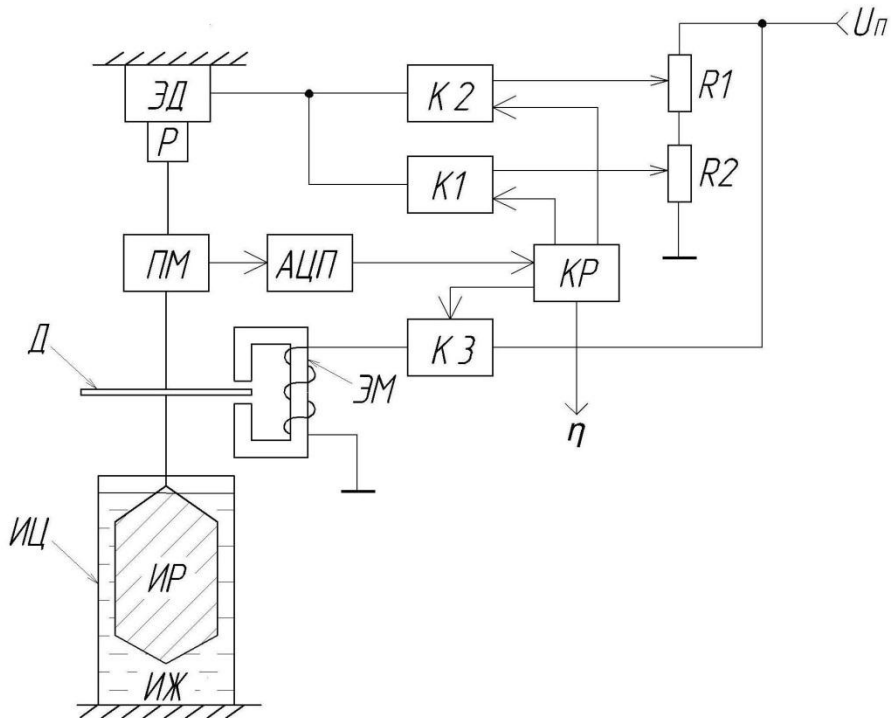


Рис. 3. Структурная схема ротационного вискозиметра повышенной точности

Тормозной момент преобразуется преобразователем (ПМ) в электрический сигнал, а затем посредством АЦП в код, который поступает на вход микроконтроллера КР:

$$N = K_{II} K_p K_{АЦП} n \eta,$$

где  $N$  – код, поступающий на вход контроллера;

$K_{II}$  – коэффициент преобразования преобразователя крутящего момента;

$K_{АЦП}$  – коэффициент преобразования АЦП.

Основными источниками погрешности вискозиметра являются нестабильность коэффициентов  $K_p$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{АЦП}$ , а также аддитивные погрешности [13, 14].

Для повышения точности измерения вязкости формируются два теста: аддитивный и мультипликативный, а измерения проводятся в три такта. Вычислительные операции и управление вискозиметром выполняются микроконтроллером (КР) [15, 16].

В первом такте ключ К1 открыт, а ключи К2 и К3 закрыты, на электродвигатель подается напряжение, устанавливающее частоту вращения ротора  $n_1$ . На вход контроллера поступает код:

$$N_1 = K_{II} K_p K_{АЦП} n_1 \eta + \Delta \alpha,$$



где  $\Delta\alpha$  – аддитивная погрешность.

Во втором такте открывается ключ К3 и электромагнит ЭМ создает дополнительный тормозной момент за счет наведения вихревых токов в диске Д. На вход контроллера поступает код аддитивного теста:

$$N_2 = K_{\Pi} K_P K_{АЦП} n_1 (\eta + M) + \Delta\alpha,$$

где  $M$  – дополнительный эталонный тормозной момент.

В третьем такте создается мультипликативный тест, при этом ключ К2 открыт, а ключи К1 и К3 закрыты. На электродвигатель подается более высокое напряжение, вследствие чего частота вращения ротора возрастает до  $n_2$ . На вход контроллера поступает код мультипликативного теста:

$$N_3 = K_{\Pi} K_P K_{АЦП} n_2 \eta + \Delta\alpha.$$

Результаты трех измерений обрабатываются контроллером по алгоритму:

$$N_2 - N_1 = K_{\Pi} K_P K_{АЦП} n_1 M;$$

$$N_3 - N_1 = K_{\Pi} K_P K_{АЦП} \eta (n_2 - n_1);$$

$$\frac{N_3 - N_1}{N_2 - N_1} = \frac{\eta (n_2 - n_1)}{n_1 M}.$$

Отсюда определяется вязкость исследуемой жидкости:

$$\eta = \frac{(N_3 - N_1)(n_1 M)}{(N_2 - N_1)(n_2 - n_1)}.$$

Из этого выражения видно, что тестовые методы позволяют полностью исключить из результата измерения аддитивные и мультипликативные погрешности. Точность измерения вязкости определяется погрешностью задания эталонного тормозного момента, погрешностью установки частоты вращения ротора и погрешностью вычислительных операций.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крутоголов В.Д., Кулаков М.В. Ротационные вискозиметры. – М.: Машиностроение, 1984. – 112 с.
2. Брукфильд [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.brookfieldengineering.com/products>
3. А.с. 1809669 US, МКИ<sup>3</sup> G 01 N 11/14. Ротационный вискозиметр / В.А. Кузнецов, А.А. Чикурин.
4. Курс физики: Учеб. в 2 т. / Под ред. В.Н. Лозовского. – 6-е изд., испр. и доп. – М., Спб., Краснодар: Лань. 2009. – 572 с., 600 с.
5. Кузнецов В.А. Физические основы получения информации; учеб. пособие. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2015. – 216 с.
6. Максудян Л.П., Разикова Н.В. Методология выбора методик испытаний и измерений – инструмент обеспечения безопасности и качества продукции // Контроль качества продукции. – 2018. – № 9. – С. 25–28.
7. Измерения в промышленности / Под ред. П. Профоса. – М.: Металлургия, 1990. – 462 с.
8. Даренский А.Н., Гончаров И.В., Обласов Н.В. Особенности определения вязкости пластовых нефтей на капиллярном вискозиметре при проведении РVT-тестов // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 7. – С. 825–833.
9. Топильский В.Б. Схемотехника измерительных устройств. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 232 с.

10. *Бромберг Э.М., Куликовский К.Л.* Тестовые методы повышения точности измерений. – М.: Энергия, 1978. – 176 с.
11. *Кузнецов В.А.* Методы повышения помехоустойчивости и точности средств измерений: Учеб. пособие. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2011. – 68 с.
12. *Корганова О.Г., Кузнецов В.А.* Повышение точности вискозиметра методом образцовых мер // Информационно-измерительные и управляющие системы: Сб. науч. статей. Вып. 1(9). – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – С. 23–27.
13. *Фрайден Дж.* Современные датчики: Справочник. – М.: Техносфера, 2006. – 592 с.
14. *Трамперт В.* Измерение, управление и регулирование с помощью AVR-микроконтроллеров: Пер. с нем. – К.: МК-Пресс, 2007. – 208 с.
15. *Ратхор Т.С.* Цифровые измерения. АЦП / ЦАП. – М.: Техносфера, 2006. – 392 с.
16. *Сорокин В.С., Антипов Б.Л., Лазарева Н.П.* Материалы и элементы электронной техники. Т. 2. – М.: Лань, 2016. – 384 с.

*Статья поступила в редакцию 10 октября 2018 г.*

## **AUTOMATIC DETERMINATION OF VISCOSITY BY ROTARY VISCOSIMETER VRTS**

***O.G. Korganova, V.A. Kuznetsov***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

**Abstract.** *If it is necessary to determine the viscosity at a given temperature, various viscometers of various types, mostly rotational ones can be used. These viscometers need to stabilize the frequency of rotation of the measuring rotor and the use of thermostats, since the viscosity is strongly dependent on temperature. A method for measuring viscosity without these disadvantages is proposed. A viscometer contains two channels: a viscosity measuring channel and a temperature measuring channel. Rotation of the measuring rotor is carried out by a drive through a calibrated spring, the angle of its twisting is proportional to the torque, which is converted into a pulse-width signal. The microcontroller measures and analyzes PWM signal and a stress proportional to temperature, converts them into a digital code and outputs the information on viscosity and temperature through the output port in a digital form. The algorithm proposed for processing measurement information eliminates the need to stabilize the frequency of rotation of the measuring rotor.*

**Keywords:** *viscosity, rotary method of measurement, microcontroller, increase in accuracy of measurement.*

### **REFERENCES**

1. *Krutogolovov V., Kulakov M.* Rotary Viscometers. М.: Publishing House "Mashinostroeniye". – 1984. – 112 p. (in Russian).
2. Brookfield. <https://www.brookfieldengineering.com/products>
3. *Kuznetsov V., Chikurin A.* Rotational viscometer. Author's certificate 1809669 US, MKI<sup>3</sup> G 01 N 11/14. (in Russian).
4. Physics course. Textbook in 2 volumes. Edited by V. Losovsky. 6-th edition. М.: Publishing House "Lan", 2009. – 572 p. (in Russian).
5. *Kuznetsov V.* Physical basis of obtaining information. Study guide. Samara, Samara State Technical University. – 2015. – 216 p. (in Russian).
6. *Maksudian L.P., Razikova N.V.* Methodology for selection of test and measurement methods – prod-

---

*Olga G. Korganova (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.  
Vladimir A. Kuznetsov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*

- uct safety and quality tool. Product quality control. № 9, 2018. pp 25–28. (in Russian).
7. Industry measurements. Edited by Profos P. M.: Publishing House "Metallurgy", 1990. – 462 p. (in Russian).
  8. *Darenskii A.N., Goncharov I.V., Oblasov N.V.* Features of determining viscosity of reservoir oils on a capillary viscometer when conducting PVT-tests. International Journal of Applied and Basic Research. № 7, 2016. pp 825–833. (in Russian).
  9. *Topilskiy V.* Measurements circuit engineering. M.: Publishing House "Binom. Laboratory of knowledge", 2006. – 232 p. (in Russian).
  10. *Bromberg E., Kulikovskiy K.* Test methods for improving measurement accuracy. M.: Publishing house "Energy", 1978. – 176 p. (in Russian).
  11. *Kuznetsov V.* Methods to improve noise immunity and accuracy of measuring instruments. Study guide. Samara, Samara State Technical University. – 2011. – 78 p. (in Russian).
  12. *Korganova O., Kuznetsov V.* Improving the accuracy of the viscometer by the method of reference standard. Digest of articles "Information – measuring and control systems". Vol. 1 (9). – Samara, Samara State Technical University. – 2014. – pp 23–27. (in Russian).
  13. *Fryden J.* Modern sensors. Handbook. M.: Publishing House "Technosphere", 2006. – 592 p. (in Russian).
  14. *Trampert V.* Measurement, control and regulation using AVR microcontrollers. Translation from german. M.: Publishing House "MK-Press", 2007. – 208 p. (in Russian).
  15. *Rathor T.* Digital measurements. ADC/DAC. M.: Publishing House "Technosphere". – 2006. – 392 p. (in Russia).
  16. *Sorokin V.S., Antipov B.L., Lazareva N.P.* Materials and elements of electronic equipment. Vol. 2. Publishing Lan, 2016. – 384 p.

УДК 621.317.33

## АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ И ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОМЕХИ

*П.К. Ланге, Е.Е. Ярославкина*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

***Аннотация.** Рассмотрены вопросы оперативного измерения интенсивности одиночного импульса, а также определения его аппроксимационной модели. В качестве импульса выбрана огибающая радиолокационного импульса, а также пик сигнала аналитического прибора. В качестве меры интенсивности выбрана площадь, а также дисперсия импульса. Для решения поставленной задачи используется сплайн-аппроксимация дискретных значений импульсного сигнала. Определена погрешность сплайн-аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала, а также погрешность аппроксимации при наличии случайной помехи. Показано, что использование сплайн-аппроксимации снижает влияние случайной помехи. Определены характеристики предложенного метода при использовании параболической, а также кубической сплайн-аппроксимации. Приведен анализ погрешности рассмотренного метода, вызванной наличием случайной аддитивной помехи. Определены характеристики рассмотренного метода при анализе гауссового сигнала. Определена зависимость погрешности рассмотренного метода от интенсивности случайной помехи. Исследование проведено для равномерного закона распределения случайной помехи. Описана структура системы, реализующей описанный метод сплайн-аппроксимации дискретных значений сигнала. Предложено использовать рассмотренный аппроксимационный метод измерения интенсивности импульсного гауссового сигнала при решении задач обнаружения сигнала на фоне помех, а также же определения его границ. Предложено использовать описанные методы при необходимости оперативного определения эффективного значения периодического негармонического сигнала (за время не более половины его периода) путем определения дисперсии его одной полуволны. Предложено также использовать описанные методы для определения информативных параметров импульсного сигнала (его положения начала, конца, амплитуды).*

***Ключевые слова:** дисперсия сигнала, аппроксимация, случайная помеха, дискретизация, мгновенное значение, сплайн, импульсный сигнал.*

### **Введение**

Импульсные сигналы используются при измерениях информационных параметров различных процессов во многих прикладных задачах. Такими характерными задачами являются радиолокация и гидролокация, хроматографические и спектрометрические системы анализа состава различных веществ, импульсные системы дефектоскопии, а также системы определения параметров потока жидкости и газа. В большинстве случаев при решении этих задач необходимо распо-

---

*Ланге Петр Константинович (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».*

*Ярославкина Екатерина Евгеньевна (к.т.н., доц.), заведующий кафедрой «Информационно-измерительная техника».*

знать импульсный сигнал на фоне случайной помехи, определить его интенсивность, а также форму и основные параметры (амплитуду, ее положение на оси времени, моменты начала и конца импульса).

Такая же задача возникает и при оперативном управлении, а также обнаружении аварийной ситуации мощного электрооборудования, при которой необходимо оперативно определить параметры периодического негармонического сигнала в течение времени не более его полупериода.

В приложениях к радиолокации и гидролокации обычно считается, что импульсный сигнал имеет гауссову форму, и ставится задача его распознавания на фоне случайных помех [1]. Для определения информационных характеристик импульсного сигнала используются различные методы его аппроксимации, например сверткой двух треугольных импульсов [2].

В электротехнических приложениях наиболее надежным методом, используемым при решении задачи управления силовым электрооборудованием, является оперативное измерение таких интегральных характеристик, как эффективное значение напряжения и тока в цепях мощного электрооборудования, а также активная и реактивная мощности [3–4]. Аналогичные задачи необходимо решать и при управлении мощными нетрадиционными источниками электроэнергии, а также электроприводами гибридных транспортных средств [5].

Для оперативного определения аварийных и предаварийных режимов работы силового электрооборудования требуется высокое быстродействие и точность измерения интегральных характеристик периодического сигнала. При этом особое значение имеют задачи измерения эффективного значения тока и напряжения в силовых цепях мощных электроустановок [6–8].

В измерительных системах с использованием цифровых сигнальных процессоров прямое измерение может быть реализовано путем использования дискретных значений сигнала на количестве интервалов дискретизации, кратном периоду его первой гармоники. Недостатком такого метода является значительная погрешность при изменении основной частоты сигнала, в результате чего интервал дискретизации может не быть кратным ее периоду. К тому же при использовании цифровых методов при небольшом числе дискретных значений сигнала (порядка 6...10), а также при присутствии аддитивной случайной помехи погрешность определения эффективного значения сигнала может достигать значительной величины [9–12].

Сигналы, формируемые аналитическим измерительным прибором (в виде хроматограммы, спектрограммы), также обычно представляют собой последовательность импульсов определенной формы. В ряде случаев можно считать, что такие импульсы имеют гауссову форму, в других случаях они имеют более сложный вид. При аппроксимации этих импульсов определенными функциями может быть решена задача коррекции аппаратной функции инерционного детектора аналитического прибора [13]. При обработке таких сигналов необходимо определить их информационные характеристики: положение начала, конца и амплитуды импульса на оси независимого переменного (времени, длины волны и т. д.) и интенсивность (площадь импульса, дисперсию или среднеквадратичное значение).

Вышеописанные задачи усложняются в ситуациях наличия аддитивной случайной помехи.

В связи с тем, что в большинстве современных систем осуществляется аналого-цифровое преобразование сигнала, для решения вышеперечисленных задач

необходимо использовать методы аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала на интервале его существования.

### **Постановка задачи**

С целью снижения погрешности, вызванной наличием аддитивной случайной помехи, предлагается использовать аппроксимационный метод, сглаживающий влияние наложенной на анализируемый сигнал случайной помехи.

### **Аппроксимационный метод определения эффективного значения импульсного сигнала гауссового вида при отсутствии аддитивной случайной помехи**

Рассмотрим метод определения интенсивности (в виде дисперсии) импульсного сигнала гауссового вида с использованием его сплайн-аппроксимации. На практике дисперсия сигнала обычно определяется по его временной реализации  $x_c(t)$ .

В идеальном случае дисперсия  $y_d$  сигнала  $x_c$  равна

$$y_d^{ideal} = \int_0^T x_c^2 dt, \quad (1)$$

где  $T$  – интервал существования импульсного сигнала.

Рассмотрим задачу определения дисперсии импульсного сигнала по его дискретным значениям.

Внутри интервалов дискретизации сигнал может быть восстановлен с определенной погрешностью аппроксимирующей функцией. В этом случае для определения эффективного значения могут быть использованы коэффициенты аппроксимирующей функции.

При решении описанной задачи в такой постановке используются различные аппроксимации. В [14] применяются методы цифрового гармонического анализа многокомпонентных случайных сигналов, в [15] описаны системы для оценки амплитудного спектра многокомпонентных случайных сигналов.

Перспективным представляется использование «гладких» сплайн-функций для аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала внутри интервала его существования [16, 19], в которых используются кубические сплайны для аппроксимации зашумленных данных. Однако на практике целесообразно использовать аппроксимацию дискретных значений не как самоцель, а как средство для определения информационных параметров импульсного сигнала (например таких, как площадь импульса, его дисперсия).

Рассмотрим использование для этой цели параболической сплайн-функции, которая на  $n$ -м интервале дискретизации описывается выражением

$$x_{parab}(t) = a_2[n]t^2 + a_1[n]t + a_0[n], \quad (2)$$

где  $a_2[n]$ ,  $a_1[n]$ ,  $a_0[n]$  – постоянные коэффициенты для  $n$ -го интервала.

Коэффициенты  $a_2[n]$ ,  $a_1[n]$ ,  $a_0[n]$  определяются по соответствующим выражениям для одного из цифровых сплайн-фильтров. Например, для пятиточечного параболического сплайн-фильтра эти выражения определяются соотношениями [13, 18]

$$\begin{aligned}
a_0[n] &= \frac{1}{16}(-x_c[n-2] + 4x_c[n-1] + 10x_c[n] + 4x_c[n+1] - x_c[n+2]), \\
a_1[n] &= \frac{1}{8t_d}(x_c[n-2] - 6x_c[n-1] + 6x_c[n+1] - x_c[n+2]), \\
a_2[n] &= \frac{1}{16t_d^2}(-x_c[n-2] + 7x_c[n-1] - 6x_c[n] - 6x_c[n+1] + \\
&\quad + 7x_c[n+2] - x_c[n+3]).
\end{aligned} \tag{3}$$

При использовании коэффициентов (3) сплайн-аппроксимация  $X_{parab}(t)$  дискретных значений сигнала определяется выражением

$$X_{parab}(t) = \sum_{m=2}^{n+4} \begin{cases} a_2[n](t - nt_d)^2 + a_1[n](t - nt_d) + a_0[n] & \text{if } nt_d < t \leq (n+1)t_d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{4}$$

Параболическая сплайн-функция, как известно, не имеет разрывов на границах участков дискретизации по 0-й и 1-й производным, поэтому использование аппроксимирующих сплайнов практически не вызывает появления высших гармоник в спектре сигнала, восстановленного с помощью такой аппроксимации. Кроме того, цифровой фильтр, реализующий аппроксимационный алгоритм, обладает свойством сглаживания сигнала, на который наложена аддитивная помеха [19].

Первый начальный момент параболической сплайн-функции, аппроксимирующий сигнал на одном интервале дискретизации, определяется выражением

$$m_{d\ parab} = \int_0^{t_d} (a_2[n]t^2 + a_1[n]t + a_0[n]) dt = t_d \left( a_2[n] \frac{t_d^2}{3} + a_1[n] \frac{t_d}{2} + a_0^2[n] \right). \tag{5}$$

Если параболическая сплайн-аппроксимация импульсного сигнала на его периоде существования определена на  $m$  дискретных участках, то ее первый начальный момент равен

$$M_{parab} = t_d \left[ \sum_{n=1}^{m-2} \frac{1}{3} a_2^2[n] \cdot t_d^2 + \frac{1}{2} a_1[n] \cdot t_d + \frac{1}{3} a_0^2[n] \right]. \tag{6}$$

Выражение для второго начального момента сплайн-функции (то есть ее дисперсии) на одном интервале дискретизации имеет вид

$$\begin{aligned}
d_{d\ parab}[n] &= \int_0^{t_d} (a_2[n]t^2 + a_1[n]t + a_0[n])^2 dt = t_d \left( a_2[n] \frac{t_d^4}{5} + a_2[n] a_1[n] \frac{t_d^3}{2} + \right. \\
&\quad \left. a_1^2[n] \frac{t_d^2}{3} + a_0[n] a_2[n] \frac{2t_d^2}{3} + a_0[n] a_1[n] t_d + a_0^2[n] \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Если параболическая сплайн-аппроксимация импульсного сигнала на его периоде существования определена на  $m$  дискретных участках, то при интервале дискретизации  $t_d$  сигнала его дисперсия определяется выражением

$$D_{parab} = t_d \left[ \sum_{n=1}^m \frac{1}{5} a_2^2 [n] \cdot t_d^4 + \frac{1}{2} a_1 [n] a_2 [n] \cdot t_d^3 + \frac{1}{3} a_1^2 [n] \cdot t_d^2 + \frac{2}{3} a_0 [n] a_2 [n] \cdot t_d^2 + a_0 [n] a_1 [n] \cdot t_d + a_0^2 [n] \right]. \quad (8)$$

Отсюда можно при необходимости определить среднеквадратичное значение импульсного сигнала:

$$y_{rms spl} = \sqrt{D_{parab}}.$$

Как видно из выражений (3), для определения коэффициентов сплайн-аппроксимации сигнала  $x_c$  на интервале его существования необходимо использовать два дополнительных дискретных участка слева от интервала аппроксимации (на половине периода сигнала), а также два дополнительных дискретных участка справа от интервала аппроксимации.

Таким образом, сплайн-аппроксимация дискретных значений сигнала определяется на интервале  $[2t_d, (T+2t_d)]$ .

Для определения дисперсии сигнала в течение времени его существования необходимо реализовать выражения (3), (5) и (6) с помощью микропроцессорного контроллера.

Рассмотрим использование для этой цели кубической сплайн-функции, которая на  $n$ -м интервале дискретизации описывается выражением

$$x_{cub}(t) = a_3 [n] t^3 + a_2 [n] t^2 + a_1 [n] t + a_0 [n], \quad (9)$$

где  $a_3[n]$ ,  $a_2[n]$ ,  $a_1[n]$ ,  $a_0[n]$  – постоянные коэффициенты для  $n$ -го интервала.

Коэффициенты  $a_3 [n]$ ,  $a_2 [n]$ ,  $a_1 [n]$ ,  $a_0 [n]$  определяются по соответствующим выражениям для одного из цифровых сплайн-фильтров. Например, для пятиточечного кубического сплайн-фильтра эти выражения определяются соотношениями [13, 18]

$$\left. \begin{aligned} a_0 [n] &= \frac{1}{36} (-x_c [n-2] + 4x_c [n-1] + 10x_c [n] + 4x_c [n+1] - x_c [n+2]), \\ a_1 [n] &= \frac{1}{12t_d} (x_c [n-2] - 8x_c [n-1] + 8x_c [n+1] - x_c [n+2]), \\ a_2 [n] &= \frac{1}{12t_d^2} (-x_c [n-2] + 10x_c [n-1] - 18x_c [n] + 10x_c [n+1] - x_c [n+2]), \\ a_3 [n] &= \frac{1}{36t_d^3} (x_c [n-2] - 11x_c [n-1] + 28x_c [n] - 28x_c [n+1] + \\ &\quad + 11x_c [n+2] - x_c [n+3]). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При использовании коэффициентов (10) кубическая сплайн-аппроксимация  $X_{cub}(t)$  дискретных значений сигнала определяется выражением

$$X_{cub}(t) = \sum_{m=2}^{n+4} \left[ \begin{array}{ll} K [n] & \text{if } nt_d < t \leq (n+1)t_d \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right], \quad (11)$$



где  $K[n] = a_3[n](t - nt_d)^3 + a_2[n](t - nt_d)^2 + a_1[n](t - nt_d) + a_0[n]$ .

Первый начальный момент кубической сплайн-функции, аппроксимирующий сигнал на одном интервале дискретизации, определяется выражением

$$m_{d\text{ cub}} = \int_0^{t_d} (a_3[n]t^3 + a_2[n]t^2 + a_1[n]t + a_0[n]) dt =$$

$$= t_d \left( a_3[n] \frac{t_d^3}{4} + a_2[n] \frac{t_d^2}{3} + a_1[n] \frac{t_d}{2} + a_0^2[n] \right). \quad (12)$$

Если кубическая сплайн-аппроксимация импульсного сигнала на его периоде существования определена на  $m$  дискретных участках, то ее первый начальный момент равен

$$M_{\text{ cub}} = t_d \left[ \sum_{n=1}^{m-2} \frac{1}{4} a_3[n] \cdot t_d^3 + \frac{1}{3} a_2[n] \cdot t_d^2 + \frac{1}{2} a_1[n] \cdot t_d + a_0[n] \right]. \quad (13)$$

Выражение для второго начального момента кубической сплайн-функции (то есть ее дисперсии) на одном интервале дискретизации определяется выражением

$$d_{\text{ cub}}[n] = \int_0^{t_d} (a_3[n]t^3 + a_2[n]t^2 + a_1[n]t + a_0[n])^2 dt.$$

После преобразований это выражение принимает вид

$$d_{\text{ cub}}[n] = t_d \left( (a_3[n])^2 \frac{t_d^6}{7} + a_2[n]a_3[n] \frac{t_d^5}{3} + 2a_1[n]a_3[n] \frac{t_d^4}{5} + (a_2[n])^2 \frac{t_d^4}{5} + a_0[n]a_3[n] \frac{t_d^3}{2} + \right.$$

$$\left. + a_1[n]a_2[n] \frac{t_d^3}{2} + 2a_0[n]a_2[n] \frac{t_d^2}{3} + (a_1[n])^2 \frac{t_d^2}{3} + a_0[n]a_1[n]t_d + (a_0[n])^2 \right). \quad (14)$$

Если кубическая сплайн-аппроксимация импульсного сигнала на его периоде существования определена на  $m$  дискретных участках, то при интервале дискретизации  $t_d$  сигнала его дисперсия определяется выражением

$$D_{\text{ cub}} = \sum_{n=1}^m \alpha_{2d\text{ cub}}[n]. \quad (15)$$

### Анализ характеристик рассмотренного метода при отсутствии случайной помехи

В качестве примера рассмотрим задачу определения дисперсии сигнала единичной амплитуды гауссовой формы

$$x_c(t) = \exp \left[ - \frac{(t-7)^2}{3} \right], \quad (16)$$

представленного 12-ю дискретными отсчетами.

График такого сигнала приведен на рис. 1.

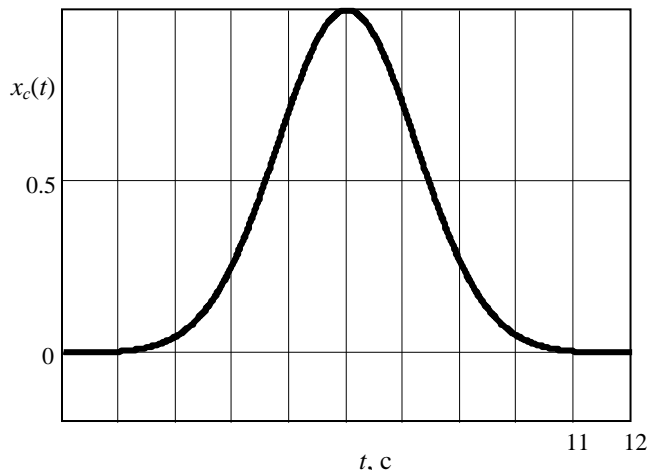


Рис. 1. График импульсного сигнала гауссовой формы

Графики параболической и кубической сплайн-аппроксимаций дискретных значений импульсного сигнала, построенные с использованием выражений (4) и (11), представлены на рис. 2.

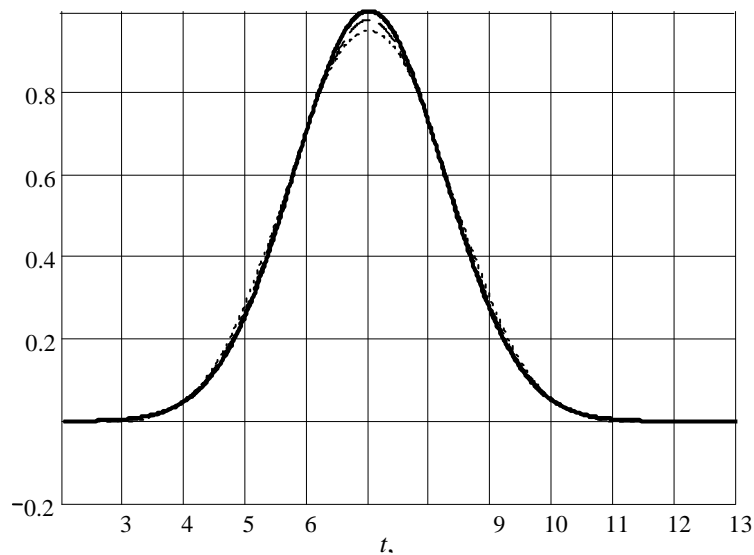


Рис. 2. Графики параболической  $X_{parab}$  и кубической  $X_{cub}$  сплайн-аппроксимаций сигнала  $x_c(t)$ :

- сигнал  $x_c(t)$ ;
- ..... аппроксимация  $X_{parab}$ ;
- аппроксимация  $X_{cub}$

Зависимости погрешностей аппроксимации импульсного сигнала параболическим и кубическим сплайном приведены на рис. 3.

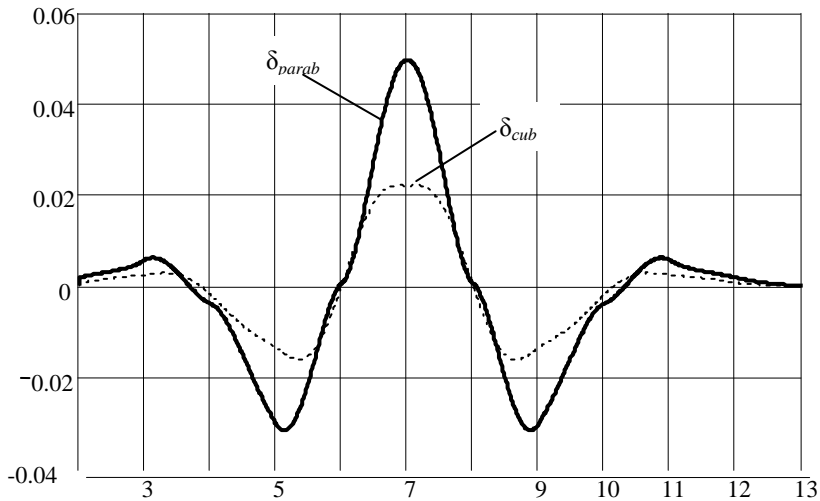


Рис. 3. Зависимости погрешности аппроксимации импульсного сигнала параболическим и кубическим сплайнами ( $\delta_{parab}$  и  $\delta_{cub}$  соответственно)

Как видно из рассмотрения этих графиков, примерно при 10 дискретных отсчетов выбранного импульсного сигнала погрешность аппроксимации параболическим сплайном не превышает 5 %, а кубическим – 2 %.

При необходимости сплайн-аппроксимация дискретных значений импульсного сигнала может быть восстановлена в непрерывном виде с помощью структур на базе интеграторов, масштабирующих усилителей, аналогового регистра сдвига [20].

Рассмотрим возможность определения моментов 1-го и 2-го порядков импульсного сигнала (16).

Истинное значение момента 1-го порядка импульсного сигнала, то есть его площадь, определяется выражением

$$M_{ideal} = \int_0^{13} x_c(t) dt = 3,07. \quad (17)$$

Истинное значение момента 2-го порядка импульсного сигнала, то есть его дисперсия, определяется выражением

$$D_{ideal} = \int_0^{13} x_c^2(t) dt = 2,171. \quad (18)$$

При использовании параболической сплайн-аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала (11) его момент 1-го порядка определяется выражением (6) и равен

$$M_{parab} = 3,071,$$

а его дисперсия, определяемая (8), равна

$$D_{parab} = 2,111. \quad (19)$$

Погрешности определения моментов импульсного сигнала  $M_1$  и  $D_2$  при параболической сплайн-аппроксимации его дискретных значений определяются выражениями

$$\delta M_{parab} = \frac{M_{ideal} - M_{parab}}{M_{ideal}} \cdot 100\%, \quad \delta D_{parab} = \frac{D_{ideal} - D_{parab}}{D_{ideal}} \cdot 100\% \quad (20)$$

и равны соответственно

$$\delta M_{parab} = 0,03\%, \quad \delta D_{parab} = 2,7\%. \quad (21)$$

При использовании кубической сплайн-аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала (11) его момент 1-го порядка определяется выражением (13) и равен

$$M_{cub} = 3,071,$$

а его дисперсия, определяемая (15), равна

$$D_{cub} = 2,111.$$

Погрешности определения моментов импульсного сигнала  $M_1$  и  $D_2$  при кубической сплайн-аппроксимации его дискретных значений определяются выражениями, аналогичными (20), и равны

$$\delta M_{cub} = 0,013\%, \quad \delta D_{cub} = 1,5\%. \quad (22)$$

#### **Анализ характеристик рассмотренного метода при наличии случайной помехи**

Рассмотрим задачу определения дисперсии сигнала (16) единичной амплитуды гауссовой формы при наличии случайной помехи с размахом 0,1, имеющей равномерный закон распределения. График такого сигнала представлен на рис. 4.

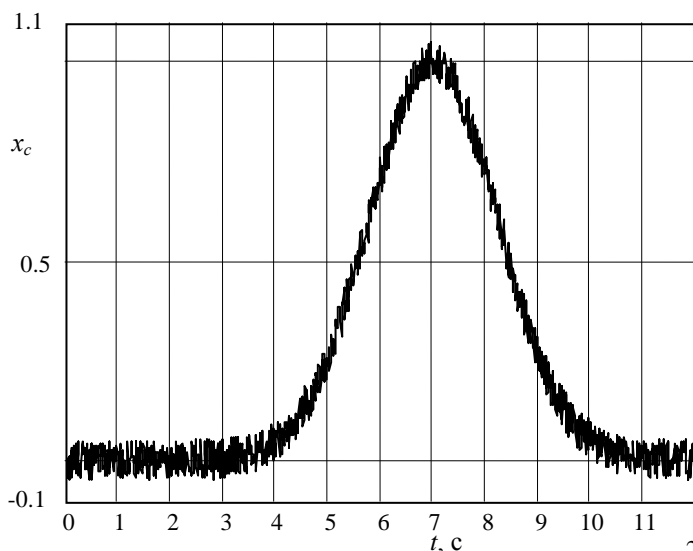


Рис. 4. Импульсный сигнал гауссовой формы с помехой

Так же как и в предыдущем примере, сигнал представлен 12 дискретными отсчетами с наложенной на них аддитивной случайной помехой. Графики параболической и кубической сплайн-аппроксимации такого сигнала представлены на рис. 5.

Графики погрешностей сплайн-аппроксимации сигнала с помехой представлены на рис. 6.

Как видно из рассмотрения рис. 3 и рис. 6, несмотря на значительную помеху погрешности сплайн-аппроксимации сигнала увеличились незначительно.

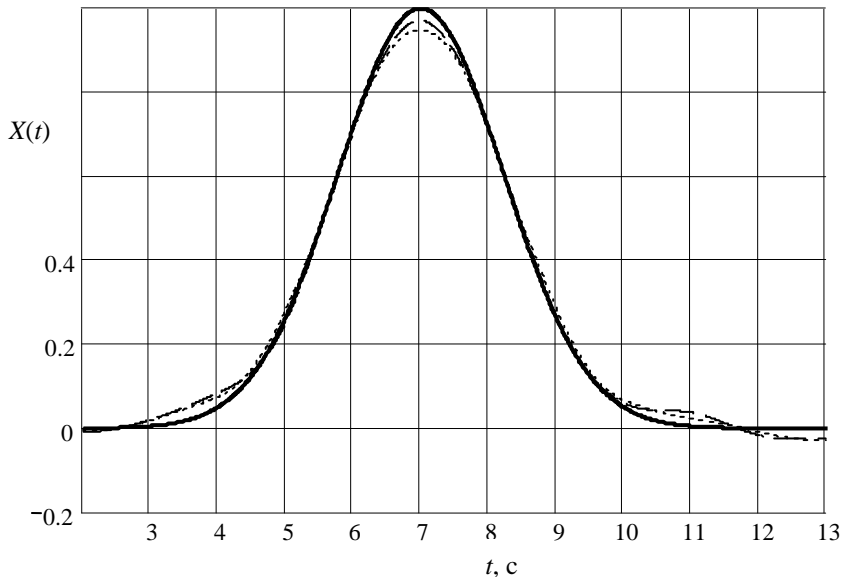


Рис. 5. Графики параболической  $X_{parab}$  и кубической  $X_{cub}$  сплайн-аппроксимаций сигнала  $x(t)$  с аддитивной случайной помехой:

- сигнал  $x(t)$ ;
- ..... аппроксимация  $X_{parab}$ ;
- - - - - аппроксимация  $X_{cub}$

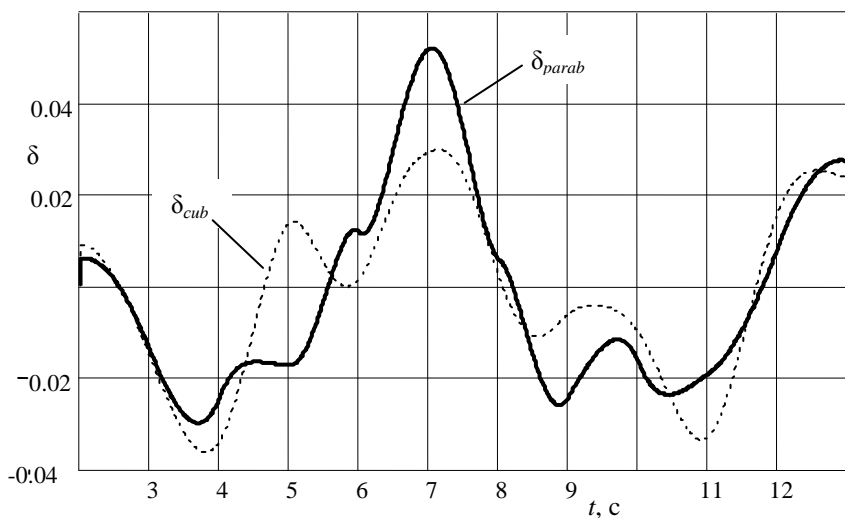


Рис. 6. Зависимости погрешности аппроксимации импульсного сигнала с помехой параболическим и кубическим сплайнами ( $\delta_{parab}$  и  $\delta_{cub}$  соответственно)

При использовании параболической сплайн-аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала (11) с помехой его момент 1-го порядка определяется выражением (6) и равен

$$M_{\text{parab}} = 3,182,$$

а его дисперсия, определяемая (8), равна

$$D_{\text{parab}} = 2,147.$$

Погрешности определения моментов импульсного сигнала  $M_{\text{parab}}$  и  $D_{\text{parab}}$  при параболической сплайн-аппроксимации его дискретных значений определяются выражениями (20) и равны соответственно

$$\delta M_{\text{parab}} = 3,6\%, \quad \delta D_{\text{parab}} = 1,1\%. \quad (23)$$

При использовании кубической сплайн-аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала (11) его момент 1-го порядка определяется выражением (13) и равен

$$M_{\text{cub}} = 3,186,$$

а его дисперсия, определяемая (15), равна

$$D_{\text{cub}} = 2,17.$$

Погрешности определения моментов импульсного сигнала  $M_{\text{cub}}$  и  $D_{\text{cub}}$  при параболической сплайн-аппроксимации его дискретных значений с наложенной аддитивной случайной помехой определяются выражениями, аналогичными (20), и равны

$$\delta M_{\text{cub}} = 3,8\%, \quad \delta D_{\text{cub}} = 0,03\%. \quad (24)$$

Рассмотрим дополнительно характеристики прямого метода определения моментов  $M$  и  $D$  импульсного сигнала с наложенной на него аддитивной случайной помехой.

Они определяются выражениями

$$M_{\Sigma} = \sum_{n=1}^m x[n], \quad D_{\Sigma} = \sum_{n=1}^m x^2[n]. \quad (25)$$

Для данного примера эти значения равны

$$M_{\Sigma} = 3,24; \quad D_{\Sigma} = 2,21.$$

Погрешности определения моментов импульсного сигнала  $M_{\text{cub}}$  и  $D_{\text{cub}}$  с наложенной аддитивной случайной помехой при использовании выражений (25) равны

$$\delta M_{\Sigma} = 5,5\%, \quad \delta D_{\Sigma} = 1,7\%. \quad (26)$$

## Выводы

1. Использование сплайн-аппроксимации дискретных значений импульсного сигнала гауссовой формы позволяет при достаточно небольшом числе отрез-

ков дискретизации (порядка 10) восстановить форму сигнала с достаточно малой погрешностью.

2. Сплайн-аппроксимация дискретных значений импульсного сигнала позволяет определить значения первого и второго начальных моментов (математическое ожидание и дисперсию) импульсного сигнала с небольшой погрешностью.

3. При наличии случайной аддитивной помехи сплайн-аппроксимация дискретных значений импульсного сигнала восстанавливает его форму с коррекцией помехи, что позволяет достаточно просто определить информационные параметры сигнала (положение начала, вершины, конца импульсного сигнала на оси независимого переменного).

4. Сравнивая погрешности (24), (25), (26) различных методов, можно сделать вывод, что при наличии случайной помехи прямой метод (25) определения моментов импульсного сигнала имеет значительно большую погрешность по сравнению с методами параболической и кубической сплайн-аппроксимации дискретных значений такого сигнала.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Harry L. Van Trees*. Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part III. Radar – Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise. John Wiley and Sons. Inc. – New York. – 2001. – 626 p.
2. *Nicolae Dumitru Alexandria, Adrian Popa*. An approximation of gaussian pulses. Proceedings of PECCS 2011 – International Conference on Pervasive and Embedded Computing and Communication Systems, pp. 132–138.
3. IEEE 1459-2000 – IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. The Institute of Electrical and Electronic Engineers Inc. New York, USA, Approved 2 February 2010.
4. EN 50160-2010 Voltage characteristics of electricity supplied by public distribution networks.
5. *Georgios C. Kryonidis, Charis S. Demoulias, Grigoris K. Papagiannis*. A new voltage control scheme for active medium-voltage (MV) networks. Electric Power Systems Research, 169 (2019), pp. 53–64.
6. *Cepisca C., Ganatsios S., Andrei H., Grigorescu S.D., Taousanidis N.* Methods for power measurement in energy meters. The Scientific Bulletin of the Electrical Engineering Faculty, 2008. No. 2. pp. 7–11.
7. *Karandaev A.S., Yachikov I.M., Khramshin V.R.* Methods of Multi-Parameter Diagnostics of Electric Equipment Condition Within On-Line Monitoring Systems. Procedia Engineering, 150 (2016), pp. 32–38.
8. *Andrei H., Spinei F., Cepisca C., Voicu N.* Contributions regarding the principles of the minimum dissipated power in stationary regime. In Proceedings of 2006 IEEE Dallas / CAS Workshop on design, applications, integration and software, Dallas, USA, 29–30 October, 2006, pp. 143–147.
9. *Daniel Morinigo-Sotelo, Roque Alfredo Osornio-Rios, Luis Morales-Velazquez, Rene de Jesus Romero-Troncoso, Gilberto Herrera-Ruiz*. Smart sensor network for power quality monitoring in electrical installations. Measurement 103 (2017). pp. 133–142.
10. *Antonio Zecchino, Mattia Marinelli*. Analytical assessment of voltage support via reactive power from new electric vehicles supply equipment in radial distribution grids with voltage-dependent loads. Electrical Power and Energy Systems. 97 (2018). pp. 17–27.
11. *Peretto L., Willems J.L., Emanuel A.E.* The effect of the integration interval on the measurement accuracy of rms values and powers in systems with non-sinusoidal wave forms / Electrical Power Quality and Utilisation Journal. vol. 13. no. 1. 2007. pp. 111–117.
12. *Cataliotti A., Cosentino V., Nuccio S.* The measurement of reactive energy in polluted distribution power systems: an analysis of the performance of commercial static meters. IEEE Transactions on Power Delivery. vol. 23. no. 3. July 2008. pp. 1296–1301.
13. *Lange P.K., Yaroslavkina E.E.* Approximation methods and tools for measuring data acquisition. Lambert Academic Publishing, Düsseldorf, Germany, 2017. 236 p. (in Russian).
14. *Yakimov V.N.* Digital harmonic analysis of multicomponent random processes. Measurement techniques, Springer US, New York, April 2006, Vol. 49, Issue 4, Pp. 341–347.
15. *Yakimov V.N., Gorbachev O.V.* Firmware of the amplitude spectrum evaluating system for multi-

- component processes. Instruments and experimental techniques, Springer US, New York, September 2013, Vol. 56, Issue 5, Pp. 540–545.
16. Jerry L. Bona1 and Hassan M. Fathallah-Shaykh. Approximation by Cubic Splines Leads to Highly Specific Discovery by Microarrays. The Open Bioinformatics Journal, 2008, 2. – pp. 54–59.
  17. Getmanov V.G. Evaluation of Spline Functions for Digital Filtering Problems. Journal of Computer and Systems Sciences International, 2016, Vol. 55, No. 5, pp. 725–734.
  18. Ланге П.К. Сплайн-аппроксимация дискретных значений сигналов с применением методов цифровой фильтрации // Сборник трудов Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2003. – Вып. 19. – С. 134–138.
  19. Хемминг Р. Цифровые фильтры. – М.: Советское радио, 1980. – 220 с.
  20. Ланге П.К. Схемы для параболической и кубической сплайн-аппроксимации дискретизированных сигналов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2005. – № 3. – С. 211–215.

*Статья поступила в редакцию 22 марта 2019 г.*

## **APPROXIMATION METHOD FOR DETERMINING THE PULSE SIGNAL FORM AND ITS INTENSITY MEASUREMENT WITH AN AVAILABLE RANDOM NOISE**

***P.K. Lange, E.E. Yaroslavkina***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

**Abstract.** *The paper deals with the issues of the operational measurement of a single pulse intensity, as well as the determination of its approximation model. The radar impulse envelope, as well as the peak signal of the analytical instrument, was chosen as the pulse. The pulse square and dispersion were chosen as a measure of intensity. To solve the problem, we use a spline - approximation of discrete samples of the pulse signal. The error of the spline - approximation of the pulse signal discrete values, as well as the error of approximation in the presence of random interference is determined. It is shown that the use of spline approximation reduces the effect of random noise. The characteristics of the proposed method are determined using parabolic, as well as cubic spline approximation. The analysis of the error of the considered method caused by the presence of a random additive interference is given. The characteristics of the considered method are determined when analyzing the Gaussian signal. The dependence of the error of the considered method on the intensity of the random noise is determined. The study was conducted for a uniform distribution of random noise. The structure of the system that implements the described method of spline - approximation of the signal samples is described. It is proposed to use the considered approximation method of measuring the pulsed Gaussian signal intensity when solving problems of its detecting against a noise background, as well as determining its boundaries. It is proposed to use the described methods, if necessary, to promptly determine the effective value of a periodic non-harmonic signal (during no more than half of its period) by determining the dispersion of its one half-wave. It is also proposed to use the described methods to determine the informative parameters of a pulse signal (the position of its beginning, end, amplitude).*

**Keywords:** *signal dispersion, approximation, random noise, discretization, instantaneous value, spline, pulse signal.*

---

*Petr K. Lange (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.  
Ekanerina E. Yaroslavkina (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*



## REFERENCES

1. *Harry L., Van Trees.* Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part III. Radar – Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise. John Wiley and Sons. Inc. – New York. – 2001. – 626 p.
2. *Nicolae Dumitru Alexandra, Adrian Popa.* An approximation of gaussian pulses. Proceedings of PECCS 2011 – International Conference on Pervasive and Embedded Computing and Communication Systems, pp. 132–138.
3. IEEE 1459-2000 – IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. The Institute of Electrical and Electronic Engineers Inc. New York, USA, Approved 2 February 2010.
4. EN 50160-2010 Voltage characteristics of electricity supplied by public distribution networks
5. *Georgios C. Kroyonidis, Charis S. Demoulias, Grigoris K. Papagiannis,* A new voltage control scheme for active medium-voltage (MV) networks. Electric Power Systems Research, 169 (2019), pp. 53–64.
6. *Cepisca C., Ganatsios S., Andrei H., Grigorescu S.D., Taousanidis N.* Methods for power measurement in energy meters. The Scientific Bulletin of the Electrical Engineering Faculty, 2008. No. 2. pp. 7–11.
7. *Karandaev A.S., Yachikov I.M., Khramshin V.R.* Methods of Multi-Parameter Diagnostics of Electric Equipment Condition Within On-Line Monitoring Systems. Procedia Engineering, 150 (2016), pp. 32–38.
8. *Andrei H., Spinei F., Cepisca C., Voicu N.* Contributions regarding the principles of the minimum dissipated power in stationary regime. In Proceedings of 2006 IEEE Dallas / CAS Workshop on design, applications, integration and software, Dallas, USA, 29–30 October, 2006, pp. 143–147.
9. *Daniel Morinigo-Sotelo, Roque Alfredo Osornio-Rios, Luis Morales-Velazquez, Rene de Jesus Romero-Troncosob, Gilberto Herrera-Ruiz.* Smart sensor network for power quality monitoring in electrical installations. Measurement 103 (2017). pp. 133–142.
10. *Antonio Zecchino, Mattia Marinelli.* Analytical assessment of voltage support via reactive power from new electric vehicles supply equipment in radial distribution grids with voltage-dependent loads. Electrical Power and Energy Systems. 97 (2018). pp. 17–27.
11. *Peretto L., Willems J.L., Emanuel A.E.* The effect of the integration interval on the measurement accuracy of rms values and powers in systems with non-sinusoidal wave forms / Electrical Power Quality and Utilisation Journal. vol. 13. no. 1. 2007. pp. 111–117.
12. *Cataliotti A., Cosentino V., Nuccio S.* The measurement of reactive energy in polluted distribution power systems: an analysis of the performance of commercial static meters. IEEE Transactions on Power Delivery. vol. 23. no. 3. July 2008. pp. 1296–1301.
13. *Lange P.K., Yaroslavkina E.E.* Approximation methods and tools for measuring data acquisition. Lambert Academic Publishing, Düsseldorf, Germany, 2017. 236 p. (in Russian).
14. *Yakimov V.N.* Digital harmonic analysis of multicomponent random processes. Measurement techniques, Springer US, New York, April 2006, Vol. 49, Issue 4, Pp. 341–347.
15. *Yakimov V.N., Gorbachev O.V.* Firmware of the amplitude spectrum evaluating system for multi-component processes. Instruments and experimental techniques, Springer US, New York, September 2013, Vol. 56, Issue 5, Pp. 540–545.
16. *Jerry L. Bona1 and Hassan M. Fathallah-Shaykh.* Approximation by Cubic Splines Leads to Highly Specific Discovery by Microarrays. The Open Bioinformatics Journal, 2008, 2. – pp. 54–59.
17. *Getmanov V.G.* Evaluation of Spline Functions for Digital Filtering Problems. Journal of Computer and Systems Sciences International, 2016, Vol. 55, No. 5, pp. 725–734.
18. *Lange P.* Spline-approximation of of signals discrete samples using digital filtering methods. Journal of the Samara State technical university. Series "Phys.-Math. Science". Samara. No. 19, 2003. – pp. 134–138 (in Russian).
19. *Hamming R.* Digital Filters. Prentice Hall inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977, 224 p.
20. *Lange P.* Circuits for parabolic and cubic spline-approximation of signal sample. Journal of the Samara State technical university. Series "Techn. Science". Samara. No. 3, 2005. – pp. 211–215 (in Russian).

УДК 681.391:543/545

## ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА – ЭРМИТА

*Р.Т. Сайфуллин, А.В. Бочкарев*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

**Аннотация.** Цель работы заключается в разработке базиса, позволяющего по коэффициентам разложения исходного сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита восстановить массив вейвлет-коэффициентов исходного сигнала. Для формирования базиса вейвлет-преобразования аналитически вычисляется вейвлет-преобразование функций Чебышева – Эрмита. В качестве вейвлетов в работе используются производные функции Гаусса с первым по четвертый порядок включительно. Для этих вейвлетов в работе представлен базис, содержащий вейвлет-преобразование первых двух функций Чебышева – Эрмита. При этом вейвлет-преобразование сигнала осуществляется в два этапа. На первом этапе получают разложение исходного сигнала в виде взвешенной суммы базисных функций Чебышева – Эрмита. На втором этапе, зная весовые множители функций, полученных на первом этапе, а также аналитическое выражение непрерывного вейвлет-преобразования для конкретных базисных функций и вейвлета, используя свойство линейности вейвлет-преобразования, восстанавливают вейвлет-преобразование исходного сигнала. Таким образом, по коэффициентам разложения исходного сигнала в выбранной системе базисных функций можно достаточно просто восстановить вейвлет-преобразование этого сигнала. Приведены примеры вычисления массивов вейвлет-коэффициентов аналитическим путем и с использованием описанного алгоритма. Для оценки погрешности восстановления вейвлет-коэффициентов используется приведенная погрешность. В качестве истинного значения вейвлет-коэффициентов принимается рассчитанный аналитически массив вейвлет-коэффициентов сигнала. Массивы вейвлет-коэффициентов и их разностей представлены в виде трехмерных поверхностей. Для вычислений и графического представления результатов моделирования использована система компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica 11.3*.

**Ключевые слова:** функции Чебышева – Эрмита, вейвлет-преобразование, вейвлеты Гаусса, функция Гаусса, базис вейвлет-преобразования, преобразование сигналов, разложение сигнала.

### Введение

Совершенствование вычислительных технологий обработки измерительной информации для сигналов сложной формы связано с развитием прикладных математических методов, лежащих в основе данных технологий, с внедрением новых программно-алгоритмических средств обработки данных. Таким образом, актуальной проблемой является разработка теоретических и прикладных подходов, которые позволяют синтезировать компактные и быстрые вычислительные алгоритмы оценки полезного сигнала, направленные на реализацию всех потен-

---

*Сайфуллин Раухат Талгатович (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».*

*Бочкарев Андрей Владимирович, аспирант.*

циальных возможностей аналитических приборов [1, 2].

Вейвлет-анализ является одним из наиболее мощных и гибких средств исследования и цифровой обработки сигналов: помимо задач их фильтрации и сжатия анализ в базисе вейвлет-функций позволяет решить задачи идентификации, моделирования, аппроксимации стационарных и нестационарных процессов, исследовать наличие разрывов и т. д.

### 1. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала

Результатом непрерывного вейвлет-преобразования сигнала  $f(x)$  одной переменной является функция двух переменных  $w_f(a, b)$ , которая определяется выражением

$$w_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (1)$$

где  $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  – базисные функции (вейвлеты).

Множитель  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  обеспечивает единичную норму для любой функции  $\psi_{a,b}(x)$ . Параметр  $b$  показывает расположение вейвлета на оси  $x$  (во времени при  $x = t$ ),  $a$  – параметр масштаба, связанный с частотой. Большие значения  $a$  соответствуют низким частотам, малые – высоким. Частотный параметр в вейвлет-преобразовании принято характеризовать как параметр масштаба.

Вейвлет-преобразование (1) представляет функцию сигнала как линейную комбинацию вейвлетов. При этом коэффициенты  $w_f(a, b)$  – это коэффициенты корреляции, или меры сходства сигнала  $f(x)$  и соответствующего вейвлета  $\psi_{a,b}(x)$ .

В результате вейвлет-преобразования получается поверхность вейвлет-коэффициентов  $w_f(a, b)$ . В качестве графического представления результата возможно использовать трехмерный график.

Функцию, описывающую распределение энергии по масштабам, называют вейвлет-спектром, или скалограммой [3]. Она имеет вид

$$s(a_i, b_j) = \left| w_f(a_i, b_j) \right|^2,$$

где  $i = 0, 2, \dots, N_a-1$ ;  
 $j = 0, 2, \dots, N_b-1$ .

Вместо поверхности можно использовать ее проекцию на плоскость, отслеживающую линии локальных экстремумов (скелетон). Скелетон вычисляется по соотношению

$$S_i(a_i, b_j) = \begin{cases} s(a_i, b_j), & \text{если } s(a_{i-1}, b_j) < s(a_i, b_j) \vee s(a_i, b_j) > s(a_{i+1}, b_j), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также одним из способов представления результатов является скейлограмма, которая определяется соотношением

$$S_g(a_i) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=0}^{N_b-1} s(a_i, b_j).$$

Выбор конкретной вейвлет-функции выполняется на основе ожидаемых свойств сигнала. При этом некоторые вейвлеты могут обеспечить более эффективное решение задачи исследования, чем другие. Иногда целесообразно предварительно выполнить синтез специальных вейвлетов, дополнительно удовлетворяющих требованиям решаемой задачи.

Важным параметром вейвлета является также и протяженность во времени. Этот параметр влияет на способность вейвлета к локализации особенностей сигнала. Чем более протяженный вейвлет использован для анализа, тем большая часть анализируемого сигнала будет влиять на результат преобразования и тем меньше способность вейвлета к локализации во времени. Однако более протяженные вейвлеты обеспечивают более точную локализацию компонентов по оси масштабов (частот).

## 2. Гауссовские вейвлеты

В качестве вейвлетов наиболее широко используется производная функции Гаусса:

$$\psi_m(x) = (-1)^{m+1} \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

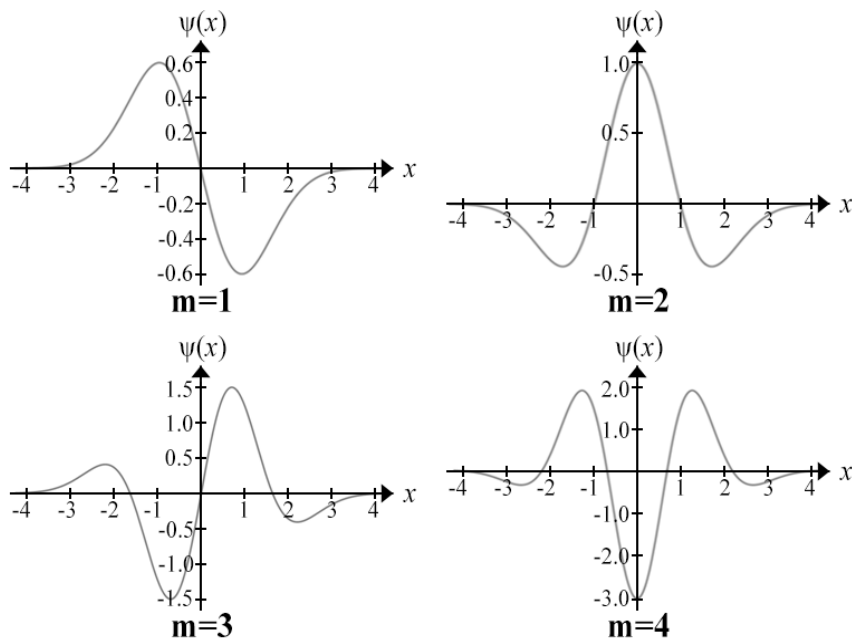


Рис. 1. Гауссовские вейвлеты для  $m = 1, 2, 3, 4$

Наибольшее применение находят гауссовские вейвлеты малых порядков:

$$\psi_1(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2)$$

$$\psi_2(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (3)$$

$$\psi_3(x) = (x^3 - 3x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4)$$

$$\psi_4(x) = (-x^4 + 6x^2 - 3) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5)$$

Данные вейвлеты приведены на рис. 1.

### 3. Проекционная схема кодирования сигналов на базе функций Чебышева – Эрмита

Для математического описания выходного сигнала аналитического прибора  $f(x)$  в работах [4, 5] предлагается использовать проекционную схему кодирования-декодирования данных, основанную на разложении сигнала в ряд по функциям Чебышева – Эрмита. Разложение сигнала в ряд по этим функциям позволяет производить анализ сигнала и его преобразование одновременно, поскольку функции Чебышева – Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье [6–9].

Функции Чебышева – Эрмита определяются следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x), \quad (6)$$

где  $\alpha_n = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$  – нормирующая константа;

$H_n(x)$  – стандартизированный многочлен Чебышева – Эрмита степени  $n$ :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

При  $x \rightarrow \infty$  функции Чебышева – Эрмита обращаются в нуль.

Пусть  $F$  – оператор преобразования Фурье, тогда

$$F(\varphi_n(x)) = i^n \cdot \varphi_n(x).$$

Для всех  $n \geq 2$  функции Чебышева – Эрмита можно определить через рекуррентные формулы:

$$\varphi_n(x) = x \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \varphi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \varphi_{n-2}(x), \quad (7)$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (8)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (9)$$

Каждая из функций  $\varphi_n(x)$  локализована на некотором отрезке  $[-\tau_n, \tau_n]$ .

Функции Чебышева – Эрмита образуют на бесконечном интервале  $-\infty < x < \infty$  полную ортогональную нормированную с единичным весом систему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n, \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Четные и нечетные функции Чебышева – Эрмита также образуют полную ортогональную нормированную с единичным весом систему на интервале  $0 < x < \infty$ .

Набор функций  $\varphi_n(x)$  (6) задает базис для кодирования и декодирования сигналов.

Примеры функций Чебышева – Эрмита  $\varphi_n(x)$  для  $n = 0, 1, 2, 3$  приведены на рис. 2.

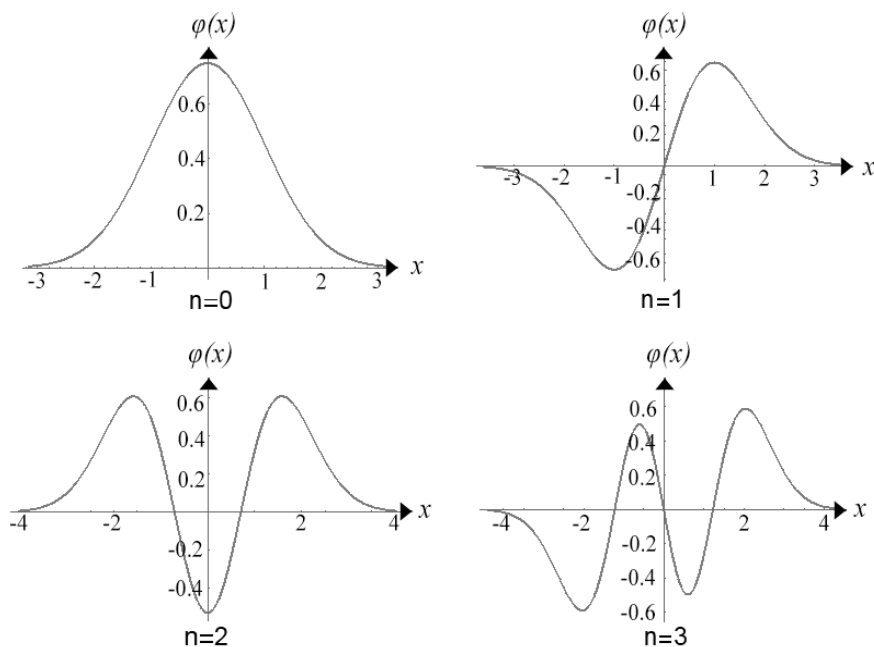


Рис. 2. Функции Чебышева – Эрмита для  $n = 0, 1, 2, 3$

Представление сигнала  $f(x)$  с помощью  $n$  функций разложения (алгоритм кодирования) заключается в нахождении коэффициентов  $c_n$ . В силу локализации функций Чебышева – Эрмита нахождение данных коэффициентов можно свести к формуле

$$c_n = \int_{-\tau_n}^{\tau_n} f(x) \cdot \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (10)$$

Алгоритм декодирования с помощью  $N$  коэффициентов разложения выражается формулой

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot \varphi_n(x). \quad (11)$$

Данные функции находят широкое применение в обработке сигналов [10–14]. Описанный алгоритм кодирования-декодирования обладает сглаживающим свойством [15].

#### 4. Вейвлет-преобразование первого порядка нулевой базисной функции

Алгоритм вычисления вейвлет-преобразования выходного сигнала аналитических приборов состоит из следующих этапов:

- 1) представление исходного сигнала в виде разложения в базисе функций Чебышева – Эрмита и нахождение коэффициентов разложения;
- 2) нахождение базисных функций для восстановления непрерывного вейвлет-преобразования различных порядков;
- 3) восстановление непрерывного вейвлет-преобразования сигнала на основе рассчитанных на первом этапе коэффициентов и синтезированного на втором этапе базиса.

При использовании производной  $m$ -го порядка функции Гаусса в качестве вейвлета вейвлет-преобразование  $n$ -й базисной функции можно записать в виде

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \psi_m\left(\frac{x-a}{b}\right) dx. \quad (12)$$

Для расширения области применения вейвлет-преобразования функций Чебышева – Эрмита следует по аналогии с вейвлетами ввести параметры сдвига  $x_0$  и масштаба  $\gamma$  для базисных функций. С учетом данного обстоятельства выражение (12) примет вид:

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot \psi_m\left(\frac{x-a}{b}\right) dx. \quad (13)$$

Рассмотрим нахождение вейвлет-преобразования первого порядка нулевой базисной функции. Для нахождения интеграла (13) необходимо ввести следующую переменную:

$$t = x - \frac{a^2 x_0 + \gamma^2 b}{a^2 + \gamma^2}. \quad (14)$$

Путем простых преобразований с учетом (14) получим следующее соотношение:

$$W_{1,\varphi_0}(a,b) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ t + a^2 \frac{x_0 - b}{a^2 + \gamma^2} \right] \cdot e^{-\frac{(t-\gamma^2 p)^2}{2\gamma^2} - \frac{(t+a^2 p)^2}{2a^2}} dt. \quad (15)$$

Введя новую переменную  $d = \sqrt{a^2 + \gamma^2}$ , имеем:

$$W_{1,\varphi_0}(a,b) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_0 - b}{d} \right)^2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( t + a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \right) \cdot e^{-t^2 \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt, \quad (16)$$

или

$$W_{1,\varphi_0}(a,b) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_0 - b}{d} \right)^2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a^3}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2 \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt + a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt \right]. \quad (17)$$

Представление (17) позволяет использовать табличный интеграл [16]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 q} dt = \begin{cases} \frac{\prod_{k=0}^{n/2} (2k+1)}{2^n q^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{q}}, & \text{если } n \bmod 2 = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При известном  $q = \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2$  данное выражение примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt = \begin{cases} \frac{\prod_{k=0}^{n/2} (2k+1)}{2^n \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi a\gamma}}{d}, & \text{если } n \bmod 2 = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (18)$$

Найдем оба входящих в (17) интеграла по отдельности с учетом (18):

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2 \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt = 0,$$

$$a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 \left( \frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt = a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi a\gamma}}{d}.$$

Подставим полученные интегралы в (17) и раскроем скобки:

$$W_{1,\Phi_0}(a,b) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_0 - b}{d} \right)^2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{a^3}} a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi a\gamma}}{d},$$

после чего, приведя подобные члены, окончательно получим:

$$W_{1,\Phi_0}(a,b) = - \left[ -e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_0 - b}{d} \right)^2} \frac{x_0 - b}{d} \right] \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{\pi}} \sqrt{a^3} \gamma}{d^2},$$

где выражение  $-e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_0 - b}{d} \right)^2} \frac{x_0 - b}{d}$  можно интерпретировать как вейвлет-преобразование первого порядка нулевой базисной функции  $\Phi_0$  для переменной  $x_0$  с параметрами сдвига  $b$  и масштаба  $d$ :

$$W_{1,\Phi_0}(a,b) = - \frac{\gamma \sqrt{2a^3 \sqrt{\pi}}}{d^2} \cdot \Psi_1 \left( \frac{x_0 - b}{d} \right). \quad (19)$$

Аналогичным образом получаем аналитические выражения для вычисления коэффициентов вейвлет-преобразования 1–4-го порядков для первых двух базисных функций:



$$W_{1,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma\sqrt{a^3}\sqrt{\pi}\left[d^2 - (x_0 - b)^2\right]}{d^5} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2}, \quad (20)$$

$$W_{2,\varphi_0}(a,b) = \frac{\gamma\sqrt{2a}\sqrt{\pi}\left[d^2 - (x_0 - b)^2\right]}{d^5} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2}, \quad (21)$$

$$W_{2,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma^2\sqrt{a}\sqrt{\pi}\left[(x_0 - b)^2 - 3d^2\right]}{d^6} \cdot \Psi_1\left(\frac{x_0 - b}{d}\right), \quad (22)$$

$$W_{3,\varphi_0}(a,b) = -\frac{\gamma\sqrt{2a^7}\sqrt{\pi}\left[(x_0 - b)^2 - 3d^2\right]}{d^6} \Psi_1\left(\frac{x_0 - b}{d}\right), \quad (23)$$

$$W_{3,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma^2\sqrt{a^7}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2}}{d^9} \left\{3d^8 + b^4 - 6b^2(\gamma^2 - x_0^2) + \right. \\ \left. + 4bx_0(6\gamma^2 - 2x_0^2 - b^2) - 6a^2\left[(x_0 - b)^2 - \gamma^2\right] - \gamma^2\right\}, \quad (24)$$

$$W_{4,\varphi_0}(a,b) = -\frac{\gamma\sqrt{2a^9}\sqrt{\pi}}{d^9} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2} \left[6(b^2 - \gamma^2) + \right. \\ \left. + 3d^4 + b^4 + x_0^4 - 6a^2(x_0 - b)^2 - 4bx_0(x_0^2 - 3\gamma^2 + b^2)\right], \quad (25)$$

$$W_{4,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma^2\sqrt{a^9}\sqrt{\pi}}{d^5} \Psi_1\left(\frac{x_0 - b}{d}\right) \left\{15(a^4 + \gamma^4) + x_0^2(x_0^2 - 10\gamma^2) - \right. \\ \left. - 10a^2\left[(x_0 - b)^2 - 3\gamma^2\right] + 4bx_0(5\gamma^2 - x_0^2 - b^2) + b^2(b^2 - 10\gamma^2 + 6x_0^2)\right\}. \quad (26)$$

Сравним работу алгоритма на примере простейшего сигнала:

$$f(x) = 0.7 \cdot \varphi_0(x) + 0.5 \cdot \varphi_1(x), \quad (27)$$

который является суммой двух первых базисных функций. Такой сигнал имеет простую конфигурацию (малое число перегибов), а его кодирование по (10) сводится к вычислению заданных заранее известных коэффициентов  $c_0 = 0.7$  и  $c_1 = 0.5$  при соответствующих базисных функциях в (27).

Данный сигнал изображен на рис. 3.

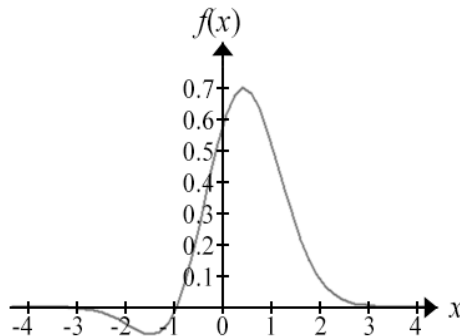


Рис. 3. Исследуемый сигнал

Сопоставим вейвлет-преобразование этого сигнала, полученное с помощью непосредственного вычисления аналитических выражений (2)–(4), и вейвлет-преобразование в базисе функций Чебышева – Эрмита (19)–(26). Первый алгоритм назовем аналитическим, второй – базисным. Массивы вейвлет-коэффициентов, полученные каждым из этих алгоритмов, приведены на рис. 4.

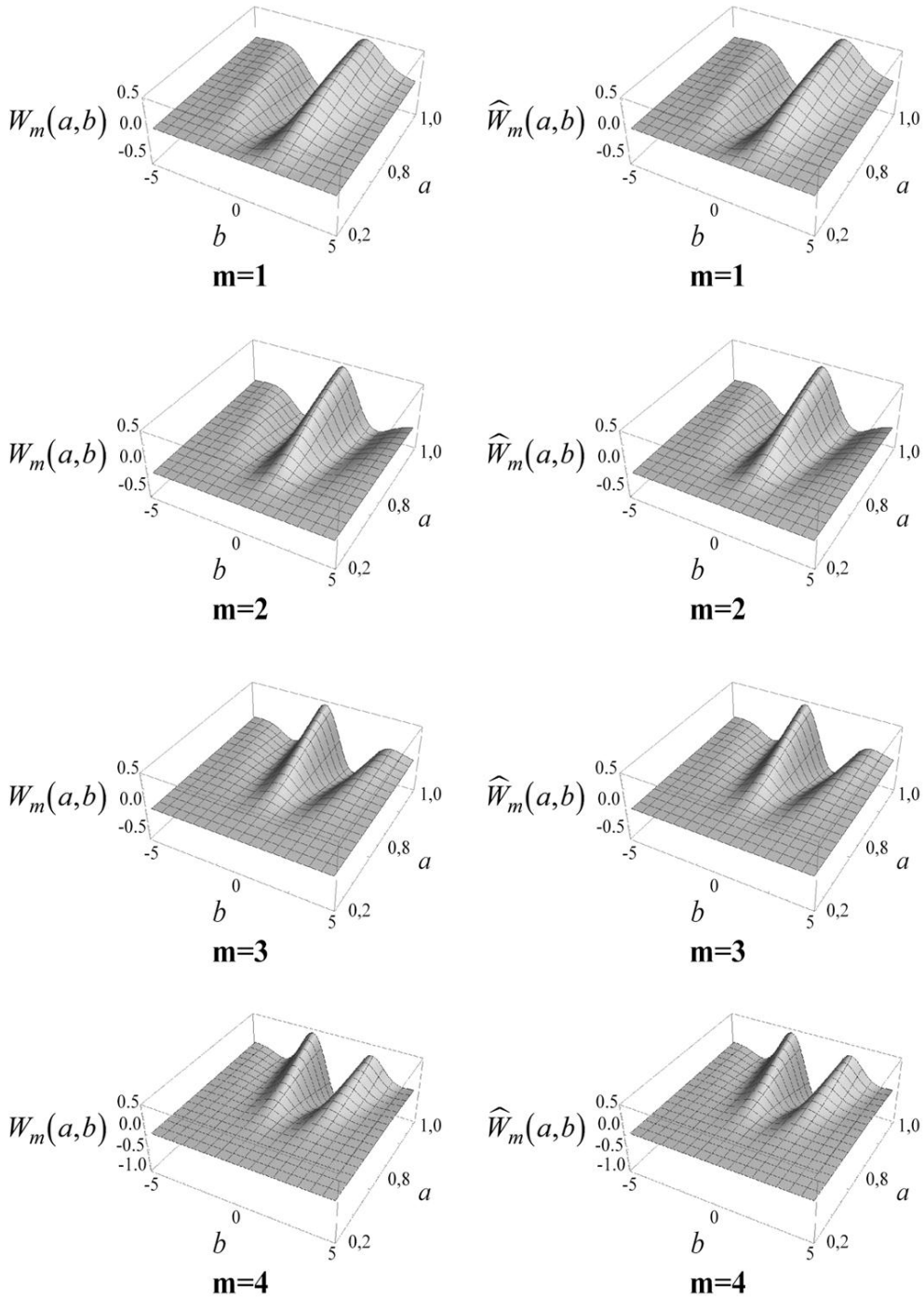


Рис. 4. Сравнение массивов вейвлет-коэффициентов:

$W_m(a,b)$  – аналитическое ВП  $m$ -го порядка;  $\widehat{W}_m(a,b)$  – базисное ВП  $m$ -го порядка

По рис. 4 можно судить о визуальной идентичности результатов аналитического и базисного подходов. Рассмотрим разности  $D_m(a,b)$  коэффициентов, полученных по каждому из описанных алгоритмов (рис. 5).

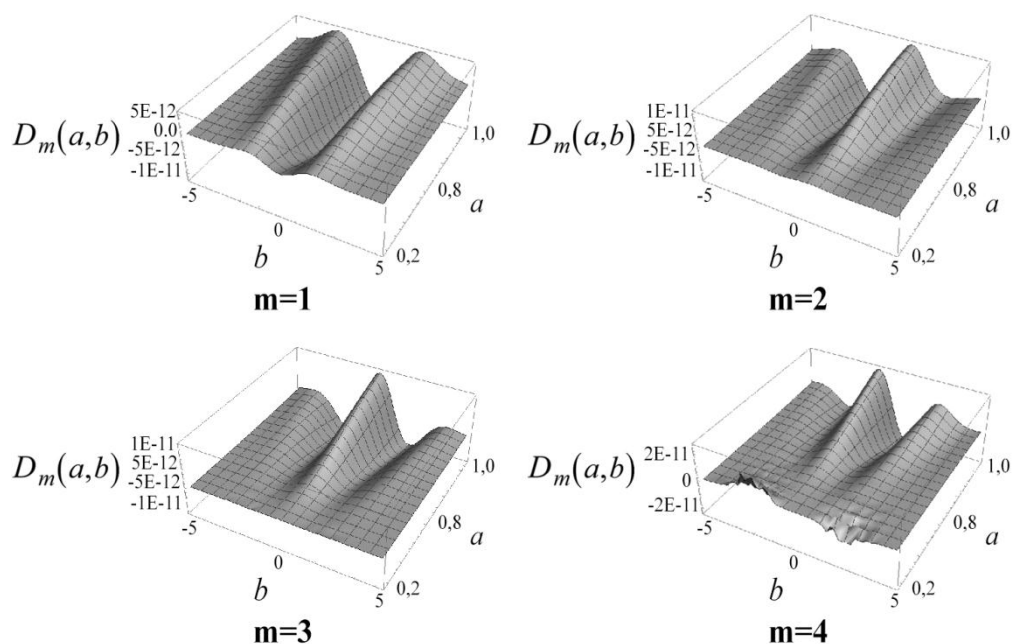


Рис. 5. Разности массивов вейвлет-коэффициентов

Для оценки ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов определим приведенную погрешность полученных результатов в виде

$$\gamma_m = \frac{|W_m(a,b) - \hat{W}_m(a,b)|_{\max}}{|W_m(a,b)|_{\max}} \cdot 100\%, \quad (28)$$

где  $W_m(a,b)$  – точная оценка коэффициента по аналитическому алгоритму;

$\hat{W}_m(a,b)$  – оценка коэффициента по базисному алгоритму.

Для приведенных примеров рассчитанная по формуле (28) погрешность не превышает  $3 \cdot 10^{-8}\%$ .

### Заключение

Благодаря использованию полученных формул расчета вейвлет-коэффициентов в базисе функций Чебышева – Эрмита удастся построить быстрые вычислительные алгоритмы обработки, что в сочетании с высокой их эффективностью является значительным достоинством метода.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Русинов Л.А. Автоматизация аналитических систем определения состава и качества веществ. – Л.: Химия, 1984. – 158 с.
2. Гуревич А.Л., Русинов Л.А., Сягаев Н.А. Автоматический хроматографический анализ. – Л.: Химия, 1980. – 192 с.
3. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.

4. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Использование функций Чебышева – Эрмита в обработке сигналов аналитических приборов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2019. – № 1(61). – С. 68–81.
5. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Выбор необходимого числа базисных функций в алгоритмах кодирования-декодирования сигналов аналитических приборов. // Информационно-измерительные и управляющие системы: межвуз. сб. науч. статей. – 2019. – Вып. 1(17). – С. 35–42.
6. Martens J.B. The Hermite transform-theory // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1595–1606.
7. Martens J.B. The Hermite transform-applications // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1607–1618.
8. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
9. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
10. Павельева Е.А., Крылов А.С. Поиск и анализ ключевых точек радужной оболочки глаза методом преобразования Эрмита // Информатика и ее применения. – 2010. – № 1, т. 4. – С. 79–82.
11. Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B. The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition // LNCS, 2008. No. 5197. P. 86–93.
12. Мамаев Н.В. Алгоритм нелокального среднего на основе разложения по функциям Эрмита в задачах компьютерной томографии // Мамаев Н.В., Лукин А.С., Юрин Д.В., Глазкова М.А., Синицин В.Е. – ГРАФИКОН'2013. Труды конференции, 2013. – С. 254–258.
13. Горлов В.А., Паришин Д.С. Разложение функции с экспоненциальным ростом в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышева – Эрмита // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – Т. 3. – № 8–3 (19–3). – С. 245–248.
14. Нейросетевой анализ и сопоставление частотно-временных векторов на основе краткосрочного спектрального представления и адаптивного преобразования Эрмита / Ю.М. Баяковский, А.О. Жирков, Д.Н. Корчагин, А.С. Крылов, А.С. Лукин. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2001, 087.
15. Балакин Д.А., Штыков В.В. Построение ортогонального банка фильтров на основе преобразований Эрмита для обработки сигналов // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 9. – С. 1–15.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

*Статья поступила в редакцию 2 апреля 2019 г.*

## **COMPUTATION OF CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM OF SIGNALS IN THE BASIS OF THE CHEBYSHEV-HERMITE FUNCTIONS**

***R.T. Sayfullin, A.V. Bochkarev***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

***Abstract.*** The paper deals with the development of basis for computation wavelet-transform from the coefficients given by decomposition original signal with Chebyshev-Hermite functions. Decomposition with Chebyshev-Hermite functions allow to transform original signal into coefficients, that can be used for reconstructing different transforms of original signal like Fourier transform, derivatives of different orders, wavelet transform and others. These transforms can be obtained by using corresponding bases. In this paper considered basis for wavelet-transform with derivative of Gauss functions as wavelet. This

---

*Rauhat T. Sayfullin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.  
Andrey V. Bochkarev, Postgraduate Student.*

basis is computed by applying continuous wavelet transform with derivative of Gauss functions as wavelet into the Chebyshev-Hermite functions. For estimating error of Chebyshev-Hermite wavelet basis reduced error are used. Arrays of the wavelet coefficients are presented as 3D plots. The Mathematica 11.3 computer algebra system was used to calculations and graph the results.

**Keywords:** Chebyshev – Hermite functions, wavelet-transform, Gauss wavelets, Gauss function, wavelet-transform basis, signal transform, signal decomposition.

#### REFERENCES

1. *Rusinov L.A.* Automation of analytical systems for determining the composition and quality of substances. – L.: Chemistry, 1984. – 158 p.
2. *Gurevich A.L., Rusinov L.A., Syagaev N.A.* Automatic chromatographic analysis. – L.: Chemistry, 1980. – 192 p.
3. *Kharkevich A.A.* Spectra and analysis. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 432 p.
4. *Saifullin R.T., Bochkarev A.V.* The use of Chebyshev-Hermite functions in signal processing of analytical instruments // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: technical sciences, No 1 (61). – 2019, p. 68–81.
5. *Saifullin R.T., Bochkarev A.V.* Selection of the required number of basis functions in the coding-decoding algorithms of signals of analytical instruments // Information and measuring and control systems: mezhvuz. Sat scientific articles. Issue 1 (17). – 2019, p. 35–42.
6. *Martens J.B.* The Hermite transform-theory // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1595–1606.
7. *Martens J.B.* The Hermite transform-applications // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1607–1618.
8. *Szego G.* Orthogonal polynomials. – M.: Fizmatgiz, 1962. – 500 p.
9. *Suetin P.K.* Classical orthogonal polynomials. – M.: Fizmatlit, 2005. – 480 s.
10. *Paveleva E.A., Krylov A.S.* Search and analysis of key points of the iris by the Hermite transformation method // Informatics and its applications. 2010. № 1 v. 4. Pp. 79–82.
11. *Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B.* The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition // LNCS, 2008. No. 5197. P. 86–93.
12. *Mamaev N.V.* The non-local average algorithm based on the expansion of Ermit functions in computed tomography problems // Mamaev N.V., Lukin A.S., Yurin D.V., Glazkova M.A., Sinitin V.E. – GRAPHICON'2013. Conference proceedings, 2013, p. 254–258.
13. *Gorlov V.A., Parshin D.S.* Expansion of a function with exponential growth in a Fourier series in orthogonal Chebyshev-Hermite polynomials // Actual directions of scientific research of the XXI century: theory and practice. 2015. Vol. 3. No. 8–3 (19–3). Pp. 245–248.
14. Neural network analysis and comparison of time-frequency vectors based on the short-term spectral representation and adaptive Hermite transform. Yu.M. Bayakovskiy, A.O. Zhirkov, D.N. Korchagin, A.S. Krylov, A.S. Lukin. Preprints IPM them. M.V. Keldysh, 2001, 087.
15. *Balakin D.A., Shtykov V.V.* Construction of an orthogonal filter bank based on Hermite transformations for signal processing // Journal of Radio Electronics, № 9, 2014, p. 1–15.
16. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Tables of integrals, sums, series and products. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 1100 p.

УДК 681.335

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКАНАЛЬНОГО АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРОЙ ПОДБОРА КОДА

*Н.Н. Хрисанов*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

**Аннотация.** Многоканальные преобразователи обычно строятся на основе традиционной схемы мультиплексор – аналого-цифровой преобразователь (АЦП), и повышение быстродействия обеспечивается совершенствованием элементной базы, применением улучшенных схемотехнических решений. На основе применения принципа логического развертывания предложена структура многоканального аналого-цифрового преобразователя, отличительной особенностью которого является применение оптимальной процедуры подбора кода, учитывающей динамические параметры цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и вероятностные характеристики входных сигналов. Процесс функционирования многоканального АЦП представлен в виде выполнения некоторой совокупности стратегий поиска множества кодов, соответствующих входным сигналам. Каждая стратегия состоит из последовательности тестов, характеризующихся временем выполнения и вероятностью их положительного или отрицательного исхода. Время выполнения каждого теста зависит от номера предыдущего. Вероятность того или иного исхода теста зависит от функции распределения входных сигналов. Приведен вывод формулы для вычисления среднего времени выполнения стратегий поиска. Указан метод решения построения оптимальных стратегий на основе метода ветвей и границ с вычислением нижних оценок решением задачи о наименьшем покрытии. Показано, что учет динамических параметров ЦАП и применение оптимальной стратегии поиска позволяют значительно повысить скорость преобразования. Показано, что применение предложенной схемы преобразования позволяет повысить скорость преобразования в несколько раз.

**Ключевые слова:** многоканальный аналого-цифровой преобразователь, стратегия поиска, метод ветвей и границ, задача о наименьшем покрытии.

Основным средством повышения быстродействия аналого-цифровых преобразователей является применение более совершенных схемотехнических решений [1–7]. При многоканальном преобразовании, как правило, используется традиционная схема мультиплексор – АЦП [8, 9].

На основании использования метода логического развертывания [10] разработана структура одноканальных АЦП последовательного приближения, отличительной особенностью которых является применение оптимальной стратегии поиска в процессе многоканального преобразования, учет динамических параметров ЦАП и вероятностных характеристик преобразуемых сигналов [11–13].

**Структура АЦП.** Структура многоканального АЦП, реализующего метод логического развертывания [14], приведена на рис. 1.

---

*Хрисанов Николай Николаевич (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Вычислительная техника».*

АЦП содержит блок сравнения 1; триггеры 2, 3, 13; элементы ИЛИ 4, 20; элементы И 5–10, 19; элемент НЕ 11; генератор импульсов 12; одновибратор 14; цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) 15; регистр 16; вычитающий счетчик 17; постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) 18. Схема сравнения 1, триггеры 2, 3, элемент ИЛИ 4, элемент И 5 составляют информационный канал 21. Схема сравнения 1, триггеры 2, 3, элемент ИЛИ 4, элемент И 5 составляют информационный канал 21.

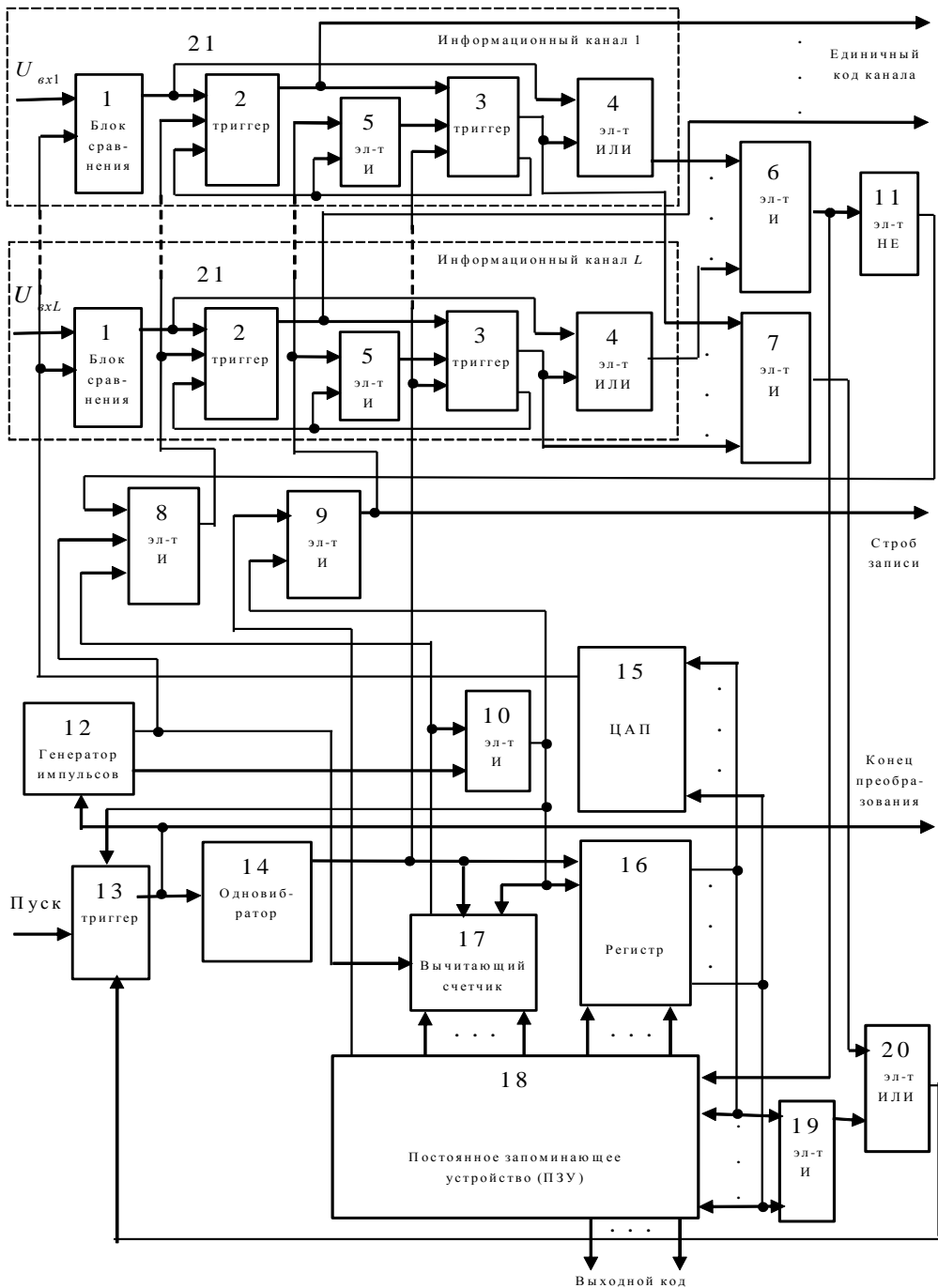


Рис. 1. Структура многоканального АЦП

Блок сравнения 1 предназначен для сравнения входного преобразуемого напряжения  $U_{ВХ}$  и напряжения с выхода ЦАП 15 –  $U_{ЦАП}$ . Если  $U_{ВХ} > U_{ЦАП}$ , на выходе блока сравнения 1 появится сигнал, соответствующий логической единице, в противном случае – логическому нулю.

Первый 2 и второй 3 триггеры, первый элемент ИЛИ 4 и первый элемент И 5 составляют логику управления информационным каналом 21.

В триггер 2 записывается информация с выхода блока сравнения 1 при поступлении на информационный вход триггера 2 переднего фронта импульса с выхода элемента И 8. Запись возможна только в том случае, если триггер 3 находится в нулевом состоянии, т. е. уровень на его инверсном выходе соответствует логической единице, поскольку этот сигнал поступает на вход установки в единичное состояние триггера 2. Триггер 3 в начале работы устройства устанавливается в нулевое состояние. Когда преобразование входного аналогового напряжения в код в данном информационном канале будет закончено, триггер 3 переводится в единичное состояние задним фронтом импульса с выхода элемента И 5. Нулевой уровень с инверсного выхода триггера 3 переведет триггер 2 в единичное состояние, после чего данный информационный канал участвовать в дальнейшей работе устройства не будет. Когда преобразование будет завершено во всех информационных каналах (т. е. все триггеры 3 будут находиться в единичном состоянии и на их прямом выходе установится уровень логической единицы), сработает элемент И 7, по сигналу с которого работа устройства закончится.

Элемент И 6 вместе с элементами ИЛИ 4 каждого информационного канала предназначен для управления процессом подбора кода. На выходе элемента И 6 появляется уровень, соответствующий логической единице, когда напряжение на входе всех информационных каналов превышает напряжение с выхода ЦАП 15. Элемент И 8 предназначен для выдачи импульса на управляющий вход триггера 2 всех информационных каналов, благодаря чему триггеры 2 переходят в состояние, соответствующее уровню сигнала на выходе соответствующего блока сравнения 1. Импульс на выходе элемента И 8 формируется при подаче на один из его входов импульса с первого выхода генератора импульсов 12, при наличии сигнала логической единицы на выходе вычитающего счетчика 17 (содержимое счетчика 17 равно нулю) и при наличии сигнала логической единицы на выходе элемента НЕ 11 (если хотя бы в одном информационном канале уровень входного напряжения меньше напряжения, поступающего с выхода ЦАП 15).

Элемент И 9 предназначен для выдачи импульса на один из входов элемента И 5 всех информационных каналов. По сигналу с выхода элемента И 5 в триггер 3 переписывается информация с выхода триггера 2. Это возможно только в случае, когда триггер 3 находится в исходном состоянии, поскольку сигнал с его инверсного выхода подается на вход элемента И 5 (т. е. в том случае, когда преобразование в данном информационном канале не закончено). Уровень логической единицы на выходе элемента И 9 формируется при приходе импульса с выхода элемента И 10 и при наличии логической единицы на третьем выходе ПЗУ 18 (преобразование в каком-либо информационном канале закончено).

Элемент И 10 формирует импульс при приходе на один из его входов импульса со второго выхода генератора импульсов 12 и при наличии уровня логической единицы на выходе вычитающего счетчика 17 (когда содержимое вычитающего счетчика 17 будет равным нулю).

Генератор импульсов 12 предназначен для синхронизации работы устрой-



ства. Он представляет собой двухфазный генератор прямоугольных импульсов, причем импульсы на его втором выходе смещены во времени относительно импульсов на его первом выходе.

Триггер 13 предназначен для фиксации начала процесса преобразования и его окончания. При подаче на его информационный вход сигнала «Пуск» триггер 13 устанавливается в единичное состояние и начинается процесс преобразования. По приходу импульса с выхода элемента И 10 и при наличии уровня логической единицы на выходе элемента ИЛИ 20 (процесс преобразования во всех информационных каналах закончен) триггер 13 устанавливается в нулевое состояние и процесс преобразования заканчивается.

Одновибратор 14 предназначен для выработки импульса в самом начале процесса преобразования. При этом импульс с его выхода поступает на управляющий вход регистра 16 и управляющий вход вычитающего счетчика, по которому регистр 16 обнуляется, а в вычитающий счетчик 17 записывается единица. Импульс с выхода одновибратора 14 также поступает на вход установки в нулевое состояние триггера 3 всех информационных каналов, по которому триггеры 3 переводятся в нулевое состояние.

ЦАП 15 предназначен для преобразования цифрового кода, подаваемого на его вход, в соответствующий уровень выходного аналогового напряжения.

Регистр 16 предназначен для хранения текущего значения выходного кода. По заднему фронту импульса, поданного на вход записи регистра 16, в него записывается информация с первых выходов ПЗУ 18. Второй управляющий вход регистра 16 используется для его обнуления.

Вычитающий счетчик 17 формирует интервал времени, соответствующий времени установления напряжения на выходе ЦАП 15 для текущего кода. После записи в этот счетчик 17 некоторого числа на его вычитающий вход подаются импульсы с первого выхода генератора импульсов 12. Содержимое вычитающего счетчика 17 с приходом каждого импульса уменьшается на единицу. Обнуление счетчика 17 указывает на то, что напряжение на выходе ЦАП достигло установившегося значения. Пусть для данного кода  $K_i$  (поданного на вход ЦАП 15) время установления выходного напряжения ЦАП составляет  $T_i$ , а период импульсов, поступающих с генератора 12, составляет  $\Delta t$ . Тогда в вычитающий счетчик 17 необходимо записать число  $N_{\text{сч}i}$ , равное  $N_{\text{сч}i} = T_i/\Delta t$ . Запись в вычитающий счетчик 17 какого-либо значения производится со вторых выходов ПЗУ 18 при подаче на его управляющий вход сигнала с выхода элемента И 10. Запись в счетчик 17 нулевого значения производится при подаче импульса на его вход обнуления.

ПЗУ 18 предназначено для хранения цифровых кодов, используемых в процессе выполнения процедуры подбора выходного кода. В ПЗУ 18 также хранятся значения задержек для всех используемых кодов (соответствующих времени установления напряжения на выходе ЦАП 15). Содержимое ПЗУ определяется выполняемой процедурой подбора кода. На рис. 2 в виде графа изображен один из возможных вариантов процесса подбора кода для 4-разрядного АЦП. В соответствии с фиг. 2 процесс начинается с проверки кода, соответствующего числу 6 (верхняя корневая вершина). Если хотя бы в одном информационном канале входное напряжение меньше напряжения, поступающего с выхода ЦАП 15, происходит переход по ребру с меткой 0, в данном случае производится переход к вершине 4. В противном случае (напряжение на входе всех информационных каналов больше напряжения, поступающего с ЦАП 15) происходит переход

к вершине 8 по ребру с меткой 1. Процесс продолжается до достижения какой-либо висячей вершины. При этом напряжению в информационном канале, для которого преобразование закончено (как правило, имеющему наименьшее значение), ставится в соответствие код, указанный на рис. 2 в прямоугольнике. После этого данный информационный канал отключается и в дальнейшем не влияет на работу устройства. Из висячей вершины происходит переход на предыдущий уровень, эти переходы обозначены пунктирной стрелкой. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет закончено преобразование во всех информационных каналах.

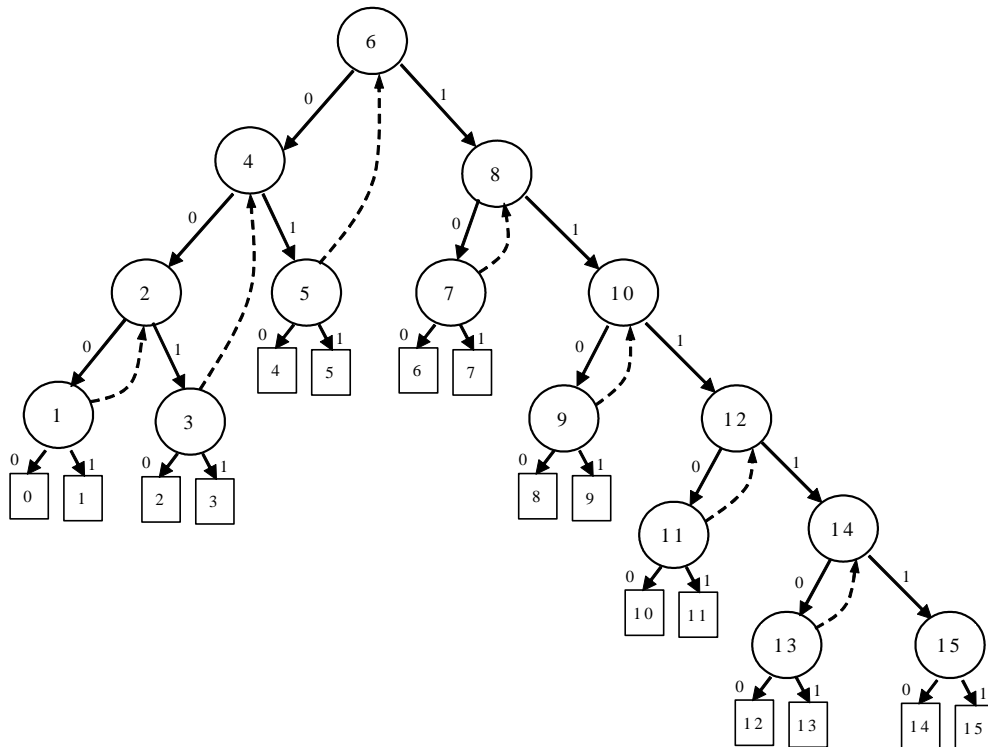


Рис. 2. Граф подбора кода в многоканальном АЦП

Например, пусть на вход первого информационного канала подано напряжение, соответствующее коду числа 9, на вход второго и третьего каналов – напряжение, соответствующее числу 8, и на вход четвертого информационного канала – напряжение, соответствующее коду числа 6. Тогда последовательность проверяемых кодов будет соответствовать графу, изображенному на рис. 3.

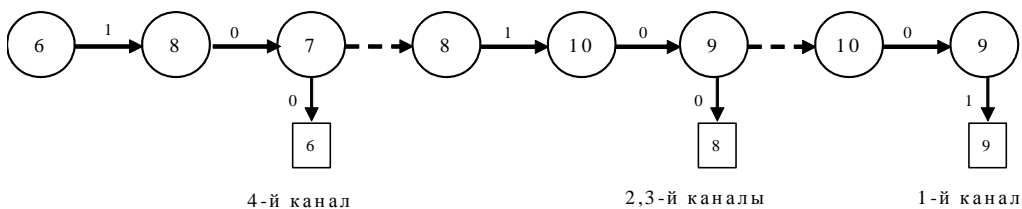


Рис. 3. Частный случай подбора кода

Согласно рис. 3 преобразование во всех каналах завершится через 8 тактов работы многоканального АЦП. Отметим, что при применении многоканального 4-разрядного АЦП с мультиплексором на 4 канала время преобразования равно 16 тактам.

**Математическая модель процесса преобразования.** Аналого-цифровое преобразование можно представить как последовательное применение некоторой совокупности тестов. Тест включает в себя набор следующих операций: считывание из ПЗУ следующего цифрового кода, подача его на вход ЦАП и преобразование в аналоговый сигнал, сравнение сигнала с выхода ЦАП со всеми входными сигналами многоканального АЦП, выбор следующей кодовой комбинации на основе анализа результатов сравнения. Через  $\Omega$  обозначим множество всех возможных кодовых комбинаций, причем  $|\Omega| = 2^n$  и  $\Omega = [0, 1, 2, \dots, N - 1]$ , где  $n$  – разрядность АЦП и  $N = 2^n$ . Множество всех применяемых тестов, а также затрат на их проведение, и вероятностные характеристики входных сигналов представим в виде таблицы.

**Табличное представление тестов**

Тесты $T$	Элементы множества $\Omega$				Затраты				
	0	1	...	$N-1$	$\tau$				
$t_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$		$\alpha_{1N}$	$\tau_{10}$	$\tau_{12}$	$\tau_{13}$	...	$\tau_{1M}$
$t_2$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$		$\alpha_{2N}$	$\tau_{21}$	$\tau_{20}$	$\tau_{23}$		$\tau_{2M}$
...									
$t_M$	$\alpha_{M1}$	$\alpha_{M2}$		$\alpha_{MN}$	$\tau_{M1}$	$\tau_{M2}$	$\tau_{M3}$		$\tau_{M0}$
Вероятность $Q = \{q_{ij}\}$	$q_{11}$	$q_{12}$		$q_{1N}$					
	$q_{21}$	$q_{22}$		$q_{2N}$					
			...						
	$q_{L1}$	$q_{L2}$		$q_{LN}$					

Матрица  $\tau = \|\tau_{ij}\|$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, N}$  содержит затраты на проведение тестов, где  $\tau_{ij}$  – затраты времени на проведение теста  $t_i$  с условием, что перед ним выполнялся тест  $t_j$ . В [1] показано, что ЦАП можно представить как инерционное звено первого порядка:

$$\tau_{ij} = -\tau \ln \frac{0,5}{|i - j|},$$

где  $\tau$  – постоянная времени этого инерционного звена. В дальнейшем будем пользоваться нормализованным значением этой величины относительно максимального значения  $\tau_{N0}$ , или длительности одного такта преобразования в обычном АЦП:

$$\tau_{ij} = \frac{\ln |i - j|}{\ln N}.$$

Матрица априорных вероятностей  $Q = \{q_{ij}\}$ ,  $l = \overline{1, L}$ ,  $j = \overline{0, N-1}$  описывает вероятностные характеристики входных сигналов. Элемент матрицы  $q_{ij}$  – это вероятность того, что входному сигналу в  $l$ -м канале соответствует выходной код  $k_j$ . В каждой строке матрицы  $Q$  априорные вероятности  $q_{ij}$  составляют полную группу событий:

$$\sum_{j=0}^{N-1} q_{ij} = 1, \quad (1)$$

поскольку для всех входных сигналов по окончании аналого-цифрового преобразования всегда будет поставлен в соответствие только один какой-либо код. При невыполнении условия (1) априорные вероятности  $\hat{q}_{ij}$  необходимо нормировать:

$$q_{ij} = \frac{\hat{q}_{ij}}{\sum_{j=0}^{N-1} \hat{q}_{ij}}.$$

Стратегию подбора выходного кода запишем в виде  $\sigma(\Omega) = \{t_{i_1}^0, t_{i_2}^0, \dots, t_{i_p}^0\}$ , где каждый тест применяется после предыдущего при его отрицательном исходе.

Графически процесс преобразования можно представить деревом (рис. 4), где применяемым тестам соответствуют вершины графа, отрицательным исходам тестов – горизонтальные дуги, положительным исходам тестов – вертикальные. Пунктирной линией отображен процесс возврата к тесту предыдущей стратегии, если не все входные сигналы преобразованы в цифровой код.

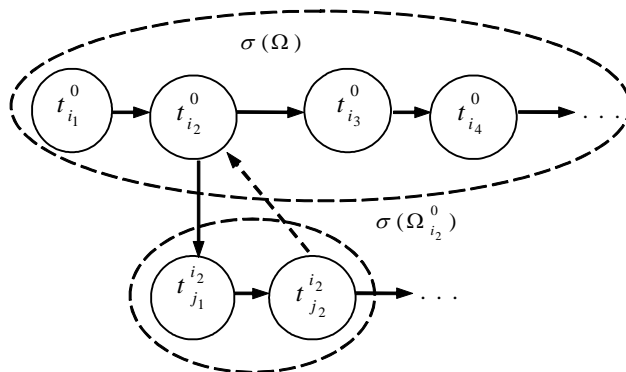


Рис. 4. Алгоритм подбора кода для многоканального АЦП

Построение оптимальной стратегии аналого-цифрового преобразования в многоканальном АЦП сводится к построению такой стратегии  $\sigma^*(\Omega)$ , для которой справедливо

$$C[\sigma^*(\Omega)] = \min_{\sigma(\Omega)} C[\sigma(\Omega)],$$

где  $C[\sigma(\Omega)]$  – математическое ожидание затрат на реализацию стратегии.

Обозначим через  $Q_{ii}$  вероятность того, что код сигнала в  $i$ -м канале АЦП будет входить во множество  $\Omega_i$ . Очевидно, учитывая (1), она равна

$$Q_{ii} = \sum_{j=1}^i q_{ij}.$$

Соответственно вероятность  $\bar{Q}_{ii}$  того, что код сигнала в  $i$ -м канале АЦП будет входить во множество  $\bar{\Omega}_i$ , равна

$$\bar{Q}_{ii} = \sum_{j=i+1}^{N-1} q_{ij}.$$

Тогда вероятность положительного исхода теста  $t_i$  и, соответственно, вероятность применения стратегии  $\sigma(\Omega_i)$ , т. е. вероятность того, что хотя бы в одном измерительном канале код сигнала входит во множество  $\Omega_i$ , равна

$$\tilde{Q}_i = 1 - \prod_{l=1}^L \bar{Q}_{li} = 1 - \prod_{l=1}^L \sum_{j=i+1}^{N-1} q_{lj}. \quad (2)$$

Вероятность отрицательного исхода теста  $t_i$  и, соответственно, вероятность применения стратегии  $\sigma(\bar{\Omega}_i)$  равна вероятности того, что хотя бы в одном измерительном канале код сигнала входит во множество  $\bar{\Omega}_i$  (это соответствует случаю, когда процесс преобразования при выполнении стратегий, соответствующих положительному исходу теста, не заканчивается и производится возврат на предыдущий уровень выполнения стратегий – пунктирные линии на рис. 2), т. е.

$$\bar{Q}_i = 1 - \prod_{l=1}^L Q_{li} = 1 - \prod_{l=1}^L \sum_{j=1}^i q_{lj}. \quad (3)$$

Кроме того, следует учитывать, что в соответствии с рис. 2 любой тест  $t_i$  может быть применен два раза. Первый раз – если во множестве  $\Omega_i$  присутствует хотя бы один искомый код. Второй раз – если после выполнения теста  $t_i$  и всех частичных стратегий процесс преобразования во всех каналах не будет закончен полностью. Обозначим как  $Q_i^t$  вероятность применения теста  $t_i$ , она равна сумме вероятностей этих двух событий:

$$Q_i^t = \tilde{Q}_i + (1 - \bar{Q}_i) = 1 - \prod_{l=1}^L \sum_{j=i+1}^{N-1} q_{lj} - \prod_{l=1}^L \sum_{j=1}^i q_{lj}. \quad (4)$$

Пусть стратегия  $\sigma(\Omega_i)$  имеет следующий вид:

$$\sigma(\Omega_i) = [t_{j_1}^i, \dots, t_{j_k}^i]. \quad (5)$$

Тогда формула для вычисления средних затрат на реализацию стратегии  $\sigma(\Omega_i)$  с учетом (3), (4) и (5) будет выглядеть следующим образом:

$$C[\sigma(\Omega_i)] = \frac{1}{Q_i} \left\{ Q_i' \tau_{j_i} + \tilde{Q}_{j_i} C[\sigma(\Omega_{j_i}^i)] + (1 - \tilde{Q}_{j_i}) C[\sigma(\Omega_{j_i}^i)] + \bar{Q}_{j_i} C[\sigma(\bar{\Omega}_{j_i}^i)] \right\}, \quad (6)$$

где  $\tilde{Q}_{j_i}$  – апостериорная вероятность положительного исхода теста  $i_{j_i}^i$ , входящего в стратегию  $\sigma(\Omega_i)$ .

На втором шаге стратегии (6) применяется тест  $i_{j_2}^i$ . С учетом этого (7) можно переписать в следующем виде:

$$C[\sigma(\Omega_i)] = \frac{1}{Q_i} \left\{ Q_i' \tau_{j_i} + \tilde{Q}_{j_i} C[\sigma(\Omega_{j_i}^i)] + \bar{Q}_{j_i} C[\sigma(\bar{\Omega}_{j_i}^i)] + \right. \\ \left. + (Q_{j_2}' \tau_{j_2 j_i} + \tilde{Q}_{j_2} C[\sigma(\Omega_{j_2}^i)] + \bar{Q}_{j_2} C[\sigma(\bar{\Omega}_{j_2}^i)]) \right\}.$$

Продолжая далее подобные рассуждения, получим окончательную формулу для средних затрат на реализацию стратегии  $\sigma(\Omega_i)$ :

$$C[\sigma(\Omega_i)] = \frac{1}{Q_i} \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} (Q_{j_k}' \tau_{j_k j_i} + \tilde{Q}_{j_k} C[\sigma(\Omega_{j_k}^i)] + \bar{Q}_{j_k} C[\sigma(\bar{\Omega}_{j_k}^i)]) \right\}, \quad (7)$$

где  $\bar{Q}_{j_0} = Q_i$ ,  $\tau_{j_0 j_i} = \tau_{j_i}$ .

Метод построения оптимальных стратегий, основанный на решении задачи о минимальном покрытии, предложен в [15].

Пусть входные сигналы во всех каналах подчинены равномерному закону распределения. Тогда при использовании стратегии, приведенной на рис. 2, среднее время преобразования в соответствии с (7) составит 4,2 такта, что почти в 4 раза меньше, чем при использовании обычного 4-разрядного АЦП последовательного приближения с мультиплексором на 4 канала со временем преобразования 16 тактов. При этом максимальное значение времени преобразования, когда будут применены все тесты стратегии рис. 2, равно 5,9 такта. Таким образом, применение предлагаемой схемы преобразователя позволяет значительно снизить время преобразования многоканального АЦП.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Marcel Pelgrom*. Analog-to-Digital Conversion. – Springer International Publishing Switzerland, 2017. – 565 p.
2. *Frank Ohnh*. Analog-Digital Converters for Industrial Applications Including an Introduction to Digital-Analog Converters. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015. – 340 p.
3. *Xinpeng Xing, Peng Zhu, Georges Gielen*. Design of Power-Efficient Highly Digital Analog-to-Digital Converters for Next-Generation Wireless Communication Systems. – Springer International Publishing AG 2018. – 200 p.
4. *Patrick Jungwirth*. Sampling Theory and Analog-to-Digital Conversion (Abridged) 2016. – 204 p.
5. *Morteza S. Alavi, Jaimin Mehta, Robert Bogdan Staszewski*. Radio-Frequency Digital-to-Analog Converters. London Wall, United Kingdom 2017. – 288 p.
6. *Walt Kester*. Analog-digital conversion. ADI Central Applications Department 2004. – 1138 p.
7. *Глинкин Е.И.* Схемотехника аналого-цифровых преобразователей: монография / 2-е изд., испр. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 160 с.
8. <http://www.lcard.ru/products/> (accessed February 24, 2019). Универсальные платы АЦП/ЦАП на шину PCI/PCI Express.
9. *Никамин В.А.* Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи: Справочник. – СПб.:

- КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2003. – 224 р.
10. Хрисанов Н.Н. Реализация принципа логического развертывания в измерительных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2018. – Вып. 2 (58). – С. 78–82.
  11. Пат. 2178948 России МКИЗ Н03М 1/26. Аналого-цифровой преобразователь логического развертывания / Н.Н. Хрисанов (Россия); № 2000104350; заявл. 21.02.2000; Опубл. 27.01.2002. Бюл. № 3.
  12. Пат. 2187885 России МКИЗ Н03М 1/26. Аналого-цифровой преобразователь / Н.Н. Хрисанов (Россия); № 2001105121/09; заявл. 21.02.2001; Опубл. 20.08.2002. Бюл. № 23.
  13. Пат. 2183381 России МКИЗ Н03М 1/26. Аналого-цифровой преобразователь / Н.Н. Хрисанов (Россия); № 2001108023/09; заявл. 26.03.2001; Опубл. 10.06.2002. Бюл. № 16.
  14. Пат. 2183382 России МКИЗ Н03М 1/26. Многоканальный аналого-цифровой преобразователь / Н.Н. Хрисанов (Россия); № 2001108022; заявл. 26.03.2001; Опубл. 10.06.2002. Бюл. № 16.
  15. Хрисанов Н.Н., Фролагин Д.Б. Метод решения задач поиска неисправностей // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2001. – Вып. 12. – С. 170–178.

*Статья поступила в редакцию 10 февраля 2019 г.*

## **MATHEMATICAL MODEL OF MULTI-CHANNEL ANALOG-DIGITAL CONVERTER WITH OPTIMUM CODE SELECTION PROCEDURE**

***N.N. Khrisanov***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

**Abstract.** *Multichannel converters are usually built based on the traditional multiplexer-analog digital converter (ADC) scheme, and the increase in speed is ensured by the improvement of the element base, the use of improved circuit design solutions. Based on the application of the principle of logical deployment, a structure of a multichannel analog-to-digital converter is proposed, a distinctive feature of which is the use of an optimal code selection procedure that takes into account the dynamic parameters of the digital-to-analog converter (DAC) and the probabilistic characteristics of the input signals. The process of functioning of a multi-channel ADC is represented as the execution of a certain set of strategies for searching for a set of codes corresponding to the input signals. Each strategy consists of a sequence of tests, characterized by execution time, and the probability of its positive or negative outcome. The execution time of each test depends on the number of the previous one. The probability of a particular outcome of the test depends on the distribution function of the input signals. The derivation of the formula for calculating the average execution time of search strategies is given. The method of solving the construction of optimal strategies based on the branch and bound method, with the calculation of lower bounds by solving the problem of the least coverage, is indicated. The estimation of the increase in the ADC speed is given taking into account the probability characteristics of the input signal, taking into account the dynamic parameters of the DAC. It is shown that the application of the proposed transformation scheme allows to increase the conversion speed several times.*

**Keywords:** *multi-channel analog-to-digital converter, search strategy, branch and bound method, the problem of the least coverage.*

---

*Nikolay N. Khrisanov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*

## REFERENCES

1. *Marcel Pelgrom*. Analog-to-Digital Conversion. – Springer International Publishing Switzerland, 2017. – 565 p.
2. *Frank Ohnh*. Analog-Digital Converters for Industrial Applications Including an Introduction to Digital-Analog Converters. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015. – 340 p.
3. *Xinpeng Xing, Peng Zhu, Georges Gielen*. Design of Power-Efficient Highly Digital Analog-to-Digital Converters for Next-Generation Wireless Communication Systems. – Springer International Publishing AG 2018. – 200 p.
4. *Patrick Jungwirth*. Sampling Theory and Analog-to-Digital Conversion (Abridged) 2016. – 204 p.
5. *Morteza S. Alavi, Jaimin Mehta, Robert Bogdan Staszewski*. Radio-Frequency Digital-to-Analog Converters. London Wall, United Kingdom 2017. – 288 p.
6. *Walt Kester*. Analog-digital conversion. ADI Central Applications Department 2004. – 1138 p.
7. *Glinkin Ye.I.* Skhemotekhnika analogo-tsifrovyykh preobrazovateley: monografiya / Ye.I. Glinkin. – Tambov: Izd-vo Tamb.gos.tekhn.un-ta, 2009. – 160 c.
8. <http://www.lcard.ru/products/> (accessed February 24,2019). Universal'nye platy ADC/DAC yf shinu PCI/PCI Express.
9. *Nikamin V.A.* Analogo-tsifrovyye preobrazovateli i tsifro-analogoye preobrazovateli: Spravochnik. – SPb.: KORONA print; M.: Al'teks-A, 2003. – 224 p.
10. *Khrisanov N.N.* Realizatsiya printsipa logicheskogo razvertyvaniya v izmeritel'nykh sistemakh // Vestnik SamGTU, seriya "Tekhnicheskie nauki", vyp. №2(58)/ Samarskiy gosud. tekhn. un-t. – 2018, str. 78–82.
11. Pat. 2178948 Rossii МКИЗ H03M 1/26. Analogo-tsifrovoy preobrazovatel' logicheskogo razvertyvaniya / N.N. Khrisanov (Rossiya); № 2000104350; zayavleno 21.02.2000; Opubl. 27.01.2002. Byul. № 3.
12. Pat. 2187885 Rossii МКИЗ H03M 1/26. Analogo-tsifrovoy preobrazovatel' / N.N. Khrisanov (Rossiya); № 2001105121/09; zayavleno 21.02.2001; Opubl. 20.08.2002. Byul. № 23.
13. Pat. 2183381 Rossii МКИЗ H03M 1/26. Analogo-tsifrovoy preobrazovatel' / N.N. Khrisanov (Rossiya); № 2001108023/09; zayavleno 26.03.2001; Opubl. 10.06.2002. Byul. № 16.
14. Pat. 2183382 Rossii МКИЗ H03M 1/26. Analogo-tsifrovoy preobrazovatel' / N.N. Khrisanov (Rossiya); № 2001108022; zayavleno 26.03.2001; Opubl. 10.06.2002. Byul. № 16.
15. *Khrisanov N.N., Frolagin D.B.* Metod resheniya zadach poiska neispravnostey // Vestnik SamGTU, seriya "Tekhnicheskie nauki", vyp. № 12 / Samarskiy gosud. tekhn. un-t. – 2001, str. 170–178.