

## Энергетика

УДК 517.598

### ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРОТОЧНОЙ ИНДУКЦИОННОЙ УСТАНОВКИ ПОДОГРЕВА НЕФТИ<sup>1</sup>

*А.А. Авдеенко, С.А. Колпащиков*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Изложена процедура нахождения выражений для температурных полей проточного индукционного нагревателя как объекта с распределенными параметрами. Рассматривается постановка двумерной задачи в полярных координатах. Обоснован переход к решению задачи в декартовых координатах. Для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных применены методы конечных интегральных преобразований, преобразования Лапласа и численно-аналитический метод с использованием пространственной сплайн-интерполяции распределенного сигнала. Предложен принцип реализации динамической модели объекта с распределенными параметрами в математических пакетах. Выполнено моделирование и получены базовые статические и динамические характеристики поведения тепловых полей нагревателя.*

**Ключевые слова:** *проточная установка индукционного нагрева, объект с распределенными параметрами, математическая модель, пространственная передаточная функция, сплайн-интерполяция, конечные интегральные преобразования, численно-аналитическое моделирование.*

При отрицательных температурах, которые в России далеко не редкость, нефть начинает менять свои характеристики (в основном из-за кристаллизации содержащегося в ней парафина), становится более густой, что может привести к остановке технологического процесса, если не к выводу из строя оборудования. Улучшение реологических характеристик нефти может быть достигнуто различными способами: смешением с углеводородными разбавителями, применением поверхностно-активных веществ, различных депрессаторов, полимерных добавок, растворенного газа и др. Однако наибольшее распространение получил трубопроводный транспорт нефти с предварительным подогревом. В основном используются схема подогрева с использованием теплообменников и промежуточных теплоносителей (вода, масло, антифриз), которые, в свою очередь, нагреваются с помощью газовых, тэновых или электронных нагревателей и реже – с помощью индукционных (рис. 1).

Основное преимущество индукционного метода подогрева нефти заключает-

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-08-00446-а.

Алексей Александрович Авдеенко, аспирант.

Сергей Александрович Колпащиков (к.т.н.), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

ся в достаточно низкой энергозатратности по сравнению с остальными способами, которое достигается за счет сравнительно высокого КПД при индукционном нагреве, отсутствия промежуточных теплоносителей и широких возможностей по управлению установкой. Для решения задач расчета параметров нагревателя, а также синтеза алгоритма оптимального управления процессом подогрева нефти ввиду технологических ограничений на максимальную температуру нагрева необходимо разработать модель температурного поля.

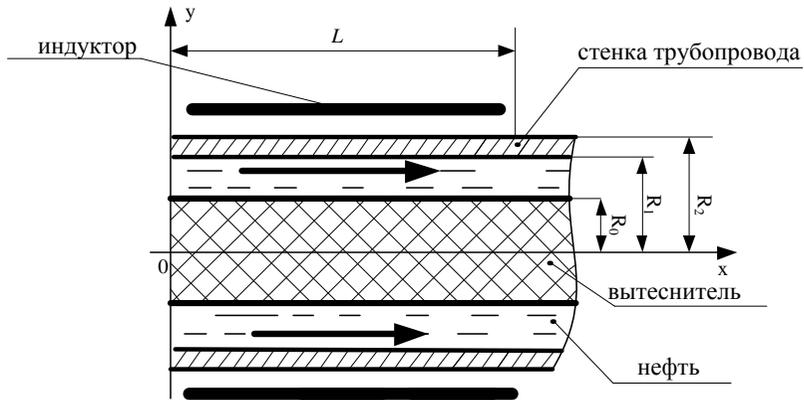


Рис. 1. Установка проточного индукционного подогрева нефти

Процессы теплообмена, происходящие в установке подогрева нефти, наглядное представлены на рис. 2.

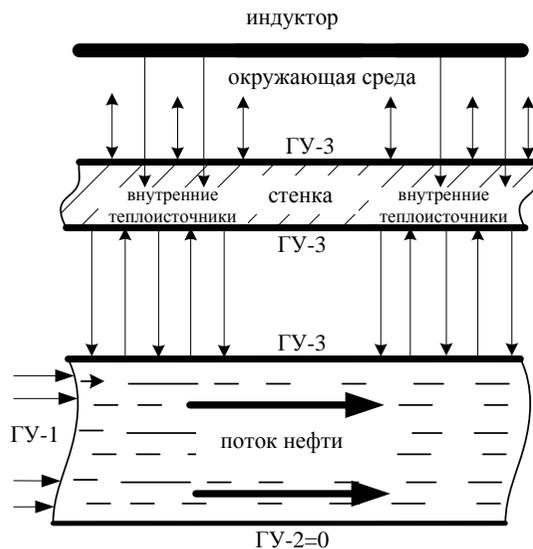


Рис. 2. Графическое представление процессов теплообмена в установке косвенного подогрева нефти индукционным методом

Достаточно точно процесс теплообмена между стенкой нагревателя и потоком нефти может быть представлен системой двумерных дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial T_s(x,r,t)}{\partial t} = a_s \cdot \left[ \frac{\partial^2 T_s(x,r,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_s(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_s(x,r,t)}{\partial r^2} \right] + \frac{F(x,r,t)}{c_s \cdot \gamma_s},$$

$$0 \leq x \leq L, R_1 \leq r \leq R_2, t > 0, a_s \neq 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_f(x,r,t)}{\partial t} = a_f \cdot \left[ \frac{\partial^2 T_f(x,r,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_f(x,r,t)}{\partial r^2} \right] - v(r) \cdot \frac{\partial T_f(x,r,t)}{\partial x},$$

$$0 \leq x \leq L, R_0 \leq r \leq R_1, t > 0, a_f \neq 0 \quad (2)$$

с начальными

$$T_s(x,r,0) = T_{s\_in}; T_f(x,r,0) = T_{f\_in}; T_s(x,r,0) = T_{s\_in}; T_f(x,r,0) = T_{f\_in} \quad (3)$$

и граничными условиями

$$\left. \frac{\partial T_s(x,r,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_s(x,r,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0; \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial T_s(x,r,t)}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0; \quad \lambda_s \cdot \left. \frac{\partial T_s(x,r,t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \alpha \cdot (T_f(x, R_1, t) - T_s(x, R_1, t)); \quad (5)$$

$$T_f(0, r, t) = T_{f0}; \quad \left. \frac{\partial T_f(x,r,t)}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0; \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x,r,t)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0; \quad \lambda_f \cdot \left. \frac{\partial T_f(x,r,t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \alpha \cdot (T_s(x, R_1, t) - T_f(x, R_1, t)), \quad (7)$$

где  $T_s(x,r,t)$  – распределение температуры стенки нагревателя (по длине и радиусу), °C;

$F(x,r,t)$  – мощность внутреннего тепловыделения (индукционный нагрев), Вт/м<sup>3</sup>;

$T_f(x,r,t)$  – распределение температуры потока жидкости (по длине и радиусу), °C;

$v(r)$  – функция распределения скорости по радиусу, м/с;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи между стенкой и потоком, Вт/(м<sup>2</sup>·°C);

$a_s = \lambda_s / (c_s \cdot \gamma_s)$  – коэффициент температуропроводности материала, м<sup>2</sup>/с;

$\lambda_s$  – теплопроводность материала стенки, Вт/(м·°C);

$c_s$  – удельная теплоемкость материала стенки, Дж/(кг·°C);

$\gamma_s$  – плотность материала стенки, кг/м<sup>3</sup>;

$a_f = \lambda_f / (c_f \cdot \gamma_f)$  – коэффициент температуропроводности потока, м<sup>2</sup>/с;

$\lambda_f$  – теплопроводность жидкости, Вт/(м·°C);

$c_f$  – удельная теплоемкость жидкости, Дж/(кг·°C);

$\gamma_f$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;

$L$  – длина одной секции индукционного нагревателя, м;

$R_0, R_1, R_2$  – конструктивные параметры нагревателя (см. рис. 1),  $m$ .

Теплопотери с внешней поверхности стенки трубы в среду приняты равными нулю из-за использования теплоизоляционного материала. Также примем равными нулю теплопотери с торцевых сторон стенки.

Благодаря высокой теплопроводности стали в уравнении теплопроводности (1) можно отказаться от учета температурного распределения по толщине стенки.

В уравнении (2) можно пренебречь слагаемым  $\frac{\partial^2 T_f(x, r, t)}{\partial x^2}$  в силу того, что коэффициент температуропроводности нефти  $a_f$  на несколько порядков меньше, чем скорость потока. Помимо этого в данной работе будем считать скорость потока постоянной в любой точке радиуса. Также в уравнении теплопроводности (2) можно перейти к декартовым координатам, так как толщина нагреваемого слоя на порядок меньше радиуса трубы.

В дальнейшем в связи с переходом к декартовой системе координат вводится обозначение  $R_1 = R, R_0 = 0$ .

С учетом всего вышесказанного постановка задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} = a_s \cdot \frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} + \frac{F(x, t)}{c_s \cdot \gamma_s} + \beta_s \cdot (T_f(x, R, t) - T_s(x, t)),$$

$$0 \leq x \leq L, t > 0, a_s \neq 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial t} = -v \cdot \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial x} + a_f \cdot \frac{\partial^2 T_f(x, y, t)}{\partial y^2},$$

$$0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq R, t > 0, a_f \neq 0 \quad (9)$$

с начальными условиями

$$T_s(x, 0) = T_{s\_in}; \quad T_f(x, y, 0) = T_{f\_in} \quad (10)$$

и граничными

$$\left. \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0; \quad (11)$$

$$T_f(0, y, t) = T_{f0}; \quad \left. \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0; \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial r} \right|_{y=0} = 0; \quad \lambda_f \cdot \left. \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial y} \right|_{r=R} = \alpha \cdot (T_s(x, t) - T_f(x, R, t)), \quad (13)$$

где  $T_s(x, t)$  – распределение температуры стенки трубы по длине нагревателя, °C;  $F(x, t)$  – удельная мощность внутреннего тепловыделения,  $Bm/m^3$ ;  $v$  – скорость потока,  $m/c$ ;  $\beta_s$  – приведенный коэффициент конвективного теплообмена стенки с потоком,  $1/c$ .

Приведенные коэффициенты конвективного теплообмена учитывают пло-

шадь поверхности теплообмена, а также объемы и физические характеристики веществ, участвующих в теплообмене.

Согласно теории структурного моделирования объектов с распределенными параметрами (ОРП), в общем случае для двумерной системы формирование распределенного сигнала  $T_f(x, y, p)$  на выходе ОРП с передаточной функцией  $W_f(x, \xi, y, \psi, p)$  определяется выражением [1]

$$T_f(x, y, p) = \iint_D W_f(x, \xi, y, \psi, p) \cdot \omega_f(\xi, \psi, p) d\xi d\psi, \quad (14)$$

где  $W_f(x, \xi, y, \psi, p)$  – изображение по Лапласу функции Грина краевой задачи, описывающей ОРП;  $\omega_f(\xi, \psi, p)$  – стандартизирующая функция, позволяющая учесть неоднородность уравнения в частных производных, неоднородные граничные условия и ненулевое начальное распределение температур:

$$\omega_f(\xi, \psi, p) = T_{f\_in} + \delta(\psi - R) \cdot T_{s\_in}(\xi, p) + v \cdot \delta(\xi) \cdot T_{f0}. \quad (15)$$

В свою очередь, температура стенки  $T_s(x, p)$  будет определяться выражением

$$T_s(x, p) = \int_D W_s(x, \xi, p) \cdot \omega_s(\xi, p) d\xi, \quad (16)$$

где

$$\omega_s(\xi, \psi, p) = T_{s\_in} + T_f(\xi, R, p) + \frac{F(\xi, p)}{c_s \cdot \gamma_s}. \quad (17)$$

Распределенная передаточная функция для задачи (8), (10), (11) выглядит следующим образом [2]:

$$W_s(x, \xi, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^s(x) \cdot \varphi_n^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot n^2 \pi^2 / L^2)}, \quad (18)$$

где  $\varphi_n^s(\xi)$  – собственные функции решения задачи (8) с граничными условиями второго рода:

$$\varphi_n^s(\xi) = \begin{cases} \sqrt{1/L}, & k=0; \\ \sqrt{2/L} \cdot \cos(k\pi x/L) & k=1,2,\dots,\infty. \end{cases} \quad (19)$$

В качестве индукционной нагревательной установки рассматривается многосекционный индуктор, состоящий из трех индукторов. Конструкция моделируемого объекта предполагает перемешивание нефти после каждой из секций. В связи с этим рассчитывается односекционная модель.

Тогда выражение (16) с учетом (17), (18) можно записать, введя обозначение  $\frac{F(\xi, p)}{c_s \cdot \gamma_s} = q(p)$  в следующем виде:

$$T_s(x, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L T_f(\xi, R, p) \cdot \frac{\varphi_n^s(x) \cdot \varphi_n^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot n^2 \pi^2 / L^2)} d\xi + q(p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L \frac{\varphi_n^s(x) \cdot \varphi_n^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot n^2 \pi^2 / L^2)} d\xi +$$

$$+T_{s\_in} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L \frac{\varphi_n^s(x) \cdot \varphi_n^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot n^2 \pi^2 / L^2)} d\xi. \quad (20)$$

Очевидно, что в полученном выражении (20) можно выделить три составляющих, определяющих пространственно распределенные передаточные функции. По каналу  $T_{s\_in}$ :

$$W_{s1}(x, \xi, p) = T_{s\_in} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L \frac{\varphi_n^s(x) \cdot \varphi_n^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot n^2 \pi^2 / L^2)} d\xi = T_{s\_in} \cdot \frac{1}{p + \beta_s}, \quad (21)$$

по каналу  $q(p)$ :

$$W_{s2}(x, \xi, p) = q(p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L \frac{\varphi_n^s(x) \cdot \varphi_n^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot n^2 \pi^2 / L^2)} d\xi = q(p) \cdot \frac{1}{p + \beta_s}, \quad (22)$$

и по каналу  $T_f(\xi, R, p)$ :

$$W_{s3}(x, \xi, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L T_f(\xi, R, p) \cdot \frac{\varphi_n^s(x) \cdot \varphi_n^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot n^2 \pi^2 / L^2)} d\xi. \quad (23)$$

Готовые выражения функции Грина и передаточной функции для задачи (9), (10), (12), (13) отсутствуют в справочниках и математической литературе, поэтому, чтобы получить выражение для теплового поля потока нефти, решим эту задачу непосредственно. Для этого сначала применим к выражению (9) преобразования Лапласа по времени  $t \rightarrow p$  и координате  $x \rightarrow s$  с учетом начальных и граничных условий (10), (12), чтобы избавиться от производной по времени. Получим:

$$p \cdot \bar{\bar{T}}_f(s, y, p) - \frac{1}{s} \cdot T_{f\_in} = -v \cdot s \cdot \bar{\bar{T}}_f(s, y, p) + T_{f0} + a_f \cdot \frac{d^2 \bar{\bar{T}}_f(s, y, p)}{dy^2}. \quad (24)$$

Для того чтобы в получившемся выражении (24) избавиться от пространственной производной по  $y$ , воспользуемся методом конечных интегральных преобразований [1, 3]. В общем случае оно рассматривается в виде

$$\bar{\bar{T}}_{f\_c}(s, n, p) = \int_0^R \bar{\bar{T}}_f(s, y, p) \cdot \varphi^f(y) \cdot r(y) dy, \quad (25)$$

где  $r(y)$  – весовая функция, которая в данном случае примет значение

$$r(y) = \frac{1}{a_f}, \quad (26)$$

а ядро преобразования  $\varphi^f(y)$  будет являться решением задачи Штурма – Ливилля и будет определяться собственными функциями

$$\varphi_n^f(\mu_n, y) = \frac{\cos(\mu_n y)}{\|\varphi_n^*\|},$$

где норма собственных функций  $\|\varphi_n^*\|$  определяется из условия их ортонормированности [1]

$$\|\varphi_n^*\|^2 = \int_0^R \cos(\mu_n y) \cdot r(y) dy = \frac{1}{2a_f} \cdot \left( \frac{1}{2\mu_n} \cdot \sin(2\mu_n R) + R \right). \quad (27)$$

Собственные числа  $\mu_n$  будут являться корнями уравнения

$$\mu \cdot \operatorname{tg}(\mu \cdot R) = b; \quad b = \frac{\alpha}{\lambda_f}. \quad (28)$$

Вид обратного преобразования зависит от граничных условий и в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{\bar{T}}_f(s, y, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{T}}_{f-c}(s, n, p) \cdot \varphi_n^f(\mu_n y). \quad (29)$$

Применив интегральное преобразование (25) к выражению (24), получим:

$$p \cdot \bar{\bar{T}}_{f-c}(s, n, p) + v \cdot s \cdot \bar{\bar{T}}_{f-c}(s, n, p) + a\mu_n^2(s, n, p) = b \cdot \bar{\bar{T}}_s(s, p) \cdot \frac{\cos(\mu_n y)}{\|\varphi_n^*\|} +$$

$$+ v \cdot T_{f0} \cdot \frac{\sin(\mu_n R)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|} + \frac{1}{s} \cdot T_{f-in} \cdot \frac{\sin(\mu_n R)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|}.$$

Отсюда можно выразить  $\bar{\bar{T}}_{f-c}(s, n, p)$ :

$$\bar{\bar{T}}_{f-c}(s, n, p) = \frac{b \cdot \bar{\bar{T}}_s(s, p) \cdot \frac{\cos(\mu_n y)}{\|\varphi_n^*\|}}{\left( s + \frac{p + a\mu_n^2}{v} \right)} + \frac{v \cdot T_{f0} \cdot \frac{\sin(\mu_n R)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|}}{\left( s + \frac{p + a\mu_n^2}{v} \right)} + \frac{\frac{1}{s} \cdot T_{f-in} \cdot \frac{\sin(\mu_n R)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|}}{\left( s + \frac{p + a\mu_n^2}{v} \right)}. \quad (30)$$

Применив к получившемуся выражению (30) обратное косинус-преобразование вида (29) и обратное преобразование Лапласа, получим:

$$\bar{T}_f(x, y, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{b}{v} \cdot \exp\left[-\frac{x-\xi}{v}(p + a\mu_n^2)\right] \cdot \frac{\cos(\mu_n R) \cdot \cos(\mu_n y)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|^2} \cdot \bar{T}_s(\xi, p) d\xi +$$

$$+ T_{f-in} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{p + a\mu_n^2} \cdot \left( 1 - \exp\left[-\frac{x}{v}(p + a\mu_n^2)\right] \right) \cdot \frac{\sin(\mu_n R) \cdot \cos(\mu_n y)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|^2} +$$

$$+ T_{f0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{x}{v}(p + a\mu_n^2)\right] \cdot \frac{\sin(\mu_n R) \cdot \cos(\mu_n y)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|^2}. \quad (31)$$

Аналогично выражению для стенки нагревателя выражение (31) можно разбить на составляющие:

– по начальному условию  $T_{f\_in}$ :

$$W_{f1}(x, y, p) = T_{f\_in} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{p + a\mu_n^2} \cdot \left( 1 - \exp\left[-\frac{x}{v}(p + a\mu_n^2)\right] \right) \cdot \frac{\sin(\mu_n R) \cdot \cos(\mu_n y)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|^2}, \quad (32)$$

– по граничному условию при  $x = 0$ :

$$W_{f2}(x, y, p) = T_{f0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{x}{v}(p + a\mu_n^2)\right] \cdot \frac{\sin(\mu_n R) \cdot \cos(\mu_n y)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|^2}, \quad (33)$$

– по граничному условию при  $y = R$ :

$$W_{f3}(x, y, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{b}{v} \cdot \exp\left[-\frac{x-\xi}{v}(p + a\mu_n^2)\right] \cdot \frac{\cos(\mu_n R) \cdot \cos(\mu_n y)}{a_f \mu_n \cdot \|\varphi_n^*\|^2} \cdot \bar{T}_s(\xi, p) d\xi. \quad (34)$$

Таким образом, получены выражения для температурных полей стенки нагревателя и потока, однако задача остается решенной не полностью, так как выражения (23) и (34) нельзя привести к реализуемому виду, поскольку функции  $\bar{T}_s(x, p)$  и  $T_f(x, R, p)$  заранее не известны.

Для реализации модели в математических пакетах в получившихся выражениях для температурных полей стенки и потока (20) и (31) необходимо в слагаемых (23) и (34) посчитать интеграл. Для этого воспользуемся сплайн-интерполяцией распределенных сигналов температурных полей стенки нагревателя и потока [4-8].

На каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , будем искать функцию  $T^{apr}(x, p) = T_i^{apr}(x, p)$  в виде многочлена третьей степени:

$$T_i^{apr}(x, p) = j_{0i}(p) + j_{1i}(p) \cdot (x - x_i) + j_{2i}(p) \cdot (x - x_i)^2 + j_{3i}(p) \cdot (x - x_i)^3, \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (35)$$

где  $j_{0i}(p), j_{1i}(p), j_{2i}(p), j_{3i}(p)$  – коэффициенты, подлежащие определению. Первый коэффициент определяется значением функции  $T(x, p)$  в  $i$ -той точке:

$$j_{0i}(p) = T(x_i, p), \quad j_{00}(p) = T(x_0, p), \quad (36)$$

а коэффициенты  $j_{1i}(p)$  и  $j_{3i}(p)$  определяются следующими выражениями [4]:

$$j_{3i}(p) = \frac{j_{2i}(p) - j_{2i-1}(p)}{3 \cdot h_i}, \quad j_{1i}(p) = h_i \cdot j_{2i}(p) + h_i^2 \cdot j_{3i}(p) + \frac{T(x_i, p) - T(x_{i-1}, p)}{h_i}, \quad (37)$$

где  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Коэффициенты  $j_{2i}(p)$  определяются из системы линейных уравнений

$$h_i \cdot j_{2i}(p) + 2 \cdot (h_{i+1} + h_i) \cdot j_{2i} + h_{i+1} \cdot j_{2i+1} =$$

$$= 3 \cdot \left( \frac{T(x_{i+1}, p) - T(x_i, p)}{h_{i+1}} \right) - \left( \frac{T(x_i, p) - T(x_{i-1}, p)}{h_i} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad j_{20}(p) = j_{2N}(p) = 0. \quad (38)$$

Температурные поля стенки нагревателя и потока нефти можно представить в следующем виде:

$$T_{s_i}^{appr}(x, p) = j_{0i}^s(p) + j_{1i}^s(p) \cdot (x - x_i) + j_{2i}^s(p) \cdot (x - x_i)^2 + j_{3i}^s(p) \cdot (x - x_i)^3, \quad (39)$$

$$T_{f_i}^{appr}(x, R_1, p) = j_{0i}^f(p) + j_{1i}^f(p) \cdot (x - x_i) + j_{2i}^f(p) \cdot (x - x_i)^2 + j_{3i}^f(p) \cdot (x - x_i)^3, \quad (40)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а коэффициенты интерполяции будут находиться с помощью формул (37)–(38). Верхние индексы  $s$  и  $f$  коэффициентов интерполяции обозначают выражение для стенки и потока соответственно.

Теперь неизвестные функции  $T_s(\xi, p)$  в (34) и  $T_f(\xi, R_1, p)$  в (23) можно заменить на  $T_s^{appr}(\xi, p)$  и  $T_s^{appr}(\xi, R_1, p)$  соответственно, которые описываются функциями (39), (40). Для того чтобы реализовать данный подход, следует «измерять» значения температур стенки и потока в некоторых точках  $x = x_i$ , а затем рассчитывать коэффициенты интерполяции по формулам (37) и (38).

Так как сплайн-интерполяция предусматривает разбиение пространственной области на несколько участков, то (23) примет вид

$$W_{s3}(x, \xi, p) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \frac{\varphi_k^s(x) \cdot \varphi_k^s(\xi)}{p + (\beta_s + a_s \cdot k^2 \pi^2 / L^2)} \times \right. \\ \left. \times \left( j_{0i}^s(p) + j_{1i}^s(p) \cdot (\xi - x_i) + j_{2i}^s(p) \cdot (\xi - x_i)^2 + j_{3i}^s(p) \cdot (\xi - x_i)^3 \right) \right] d\xi. \quad (41)$$

Выражение (34) при подстановке  $T_s^{appr}(x, p)$  вместо  $\bar{T}_s(x, p)$  примет вид

$$W_{f3}(x, y, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{b}{v} \cdot \exp \left[ -\frac{x - \xi}{v} (p + a \mu_n^2) \right] \cdot \frac{\cos(\mu_n R) \cdot \cos(\mu_n y)}{a_H \mu_n \cdot \|\varphi_n\|^2} \times \\ \left( j_{0i}^s(p) + j_{1i}^s(p) \cdot (\xi - x_i) + j_{2i}^s(p) \cdot (\xi - x_i)^2 + j_{3i}^s(p) \cdot (\xi - x_i)^3 \right) d\xi. \quad (42)$$

Таким образом, в результате пространственной сплайн-интерполяции распределенных сигналов для тепловых полей потока и стенки становится возможным вычисление интегралов (41) и (42).

Оценка температурных полей стенки и потока осуществляется в нескольких фиксированных точках области определения распределенных сигналов  $\bar{T}_f(x, y, p)$ ,  $\bar{T}_s(x, p)$ . С помощью выражений (20), (45) получены передаточные функции, описывающие поведение температуры в конкретных точках стенки и потока:  $\bar{T}_f(x_m, y, p)$ ,  $\bar{T}_s(x_m, p)$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$ ,  $M$  – количество точек измерения

температуры потока и стенки.

В соответствии с принятым решением любой распределенный сигнал в системе интерполируется кубическими сплайнами. Вычисление коэффициентов интерполяции любого распределенного сигнала осуществляется по формулам, аналогичным (37), (38). Для этих целей разработан блок вычисления коэффициентов интерполяции (БВКИ) (рис. 3).

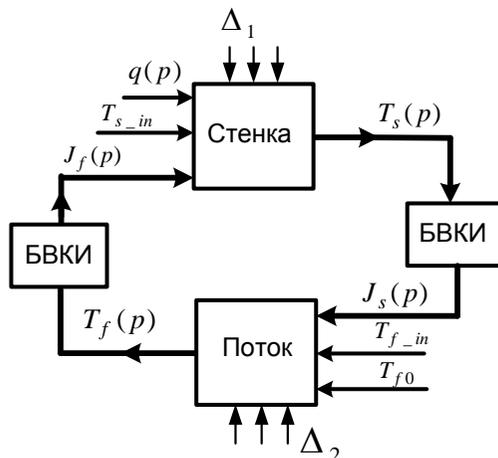


Рис. 3. Структурная схема процесса теплообмена между стенкой индукционного нагревателя и потоком нефти

На структурной схеме (рис. 3)  $\mathbf{J}(p)$  – вектор неизвестных коэффициентов сплайн-интерполяции [5]:

$$\mathbf{J}(p) = \begin{pmatrix} j_{01}(p) & j_{11}(p) & j_{21}(p) & j_{31}(p) \\ j_{02}(p) & j_{12}(p) & j_{22}(p) & j_{32}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_{0N}(p) & j_{1N}(p) & j_{2N}(p) & j_{3N}(p) \end{pmatrix}; \quad (43)$$

$\mathbf{T}_f(p)$  и  $\mathbf{T}_s(p)$  – векторы измеренных значений интерполируемых распределенных сигналов температуры потока и стенки соответственно:

$$\mathbf{T}_f(p) = (T_f(x_1, R, p), T_f(x_2, R, p), \dots, T_f(x_M, R, p));$$

$$\mathbf{T}_s(p) = (T_s(x_1, R, p), T_s(x_2, R, p), \dots, T_s(x_M, R, p)).$$

Индексы  $s, f$  векторов  $\mathbf{J}_s(p)$  и  $\mathbf{J}_f(p)$  соответственно указывают на векторы коэффициентов разложения температурного поля стенки  $\mathbf{T}_s(p)$  и потока  $\mathbf{T}_f(p)$ . Символами  $\Delta_1, \Delta_2$  обозначены векторы настраиваемых параметров теплообменника (скорость потока, длина теплообменника, коэффициент теплопередачи и т. д.).

Структура, представленная на рис. 3, может быть реализована в численных пакетах моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами. Значения коэффициентов и параметров при моделировании приведены в таблице.

### Значения коэффициентов и параметров при моделировании

Теплофизическая величина	Обозначение	Значение
Коэффициент теплопроводности материала стенки, $Вт/(м \cdot ^\circ C)$	$\lambda_s$	33,5
Удельная теплоемкость материала стенки (сталь), $Дж/(м \cdot ^\circ C)$	$c_s$	600
Плотность материала стенки (сталь), $кг/м^3$	$\gamma_s$	7830
Приведенный коэффициент конвективного теплообмена стенки с потоком, $1/с$	$\beta_s$	0,0025
Коэффициент теплопроводности потока, $Вт/(м \cdot ^\circ C)$	$\lambda_f$	0,16
Удельная теплоемкость материала потока (нефть), $Дж/(м \cdot ^\circ C)$	$c_f$	1900
Плотность материала потока (нефть), $кг/м^3$	$\lambda_f$	880
Коэффициент теплоотдачи между стенкой и потоком (или между потоком и стенкой), $Вт/(м^2 \cdot ^\circ C)$	$\alpha$	17,4

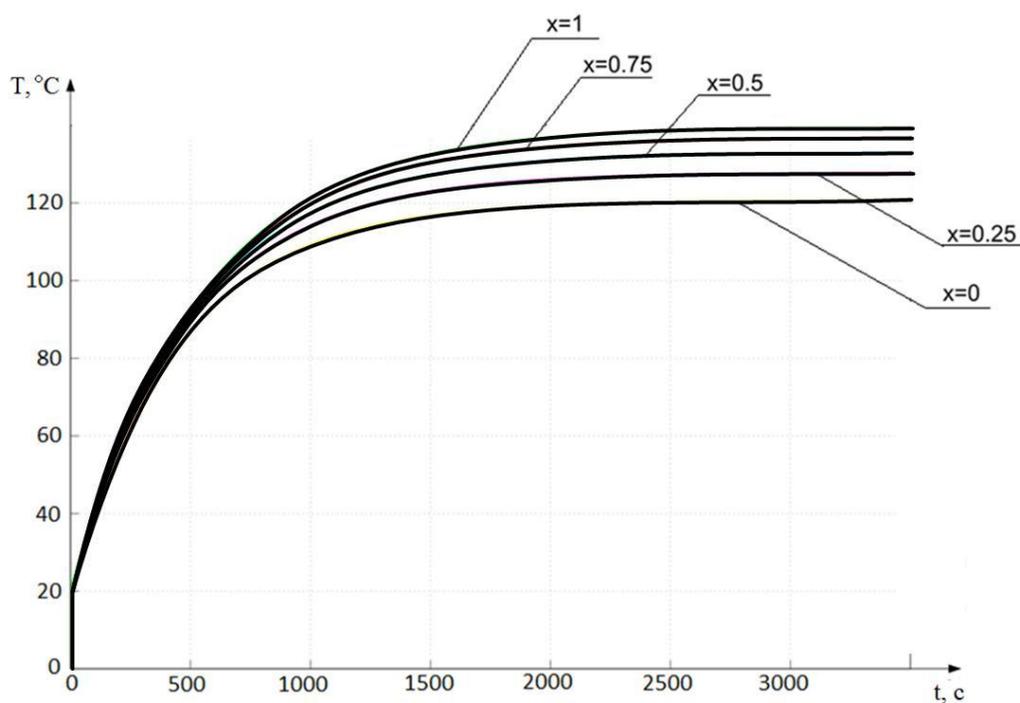


Рис. 4. Температура стенки нагревателя третьей секции при включении индуктора

Скорость потока  $v=0,02$  м/с, температуру в начале процесса и на входе в нагреватель примем  $T_{f\_in}(p) = T_{s\_in} = T_{f0} = 20^\circ C$ , толщина потока  $R=0,03$  м, удельная мощность нагревателя  $F=1174500$  Вт/м<sup>3</sup>, причем при моделировании на первые две секции подавалась максимальная мощность, а на последнюю – 90 % от мощности первых двух.

В результате моделирования процесса нагрева нефти с помощью построенной модели получены различные динамические (рис. 4, 5) и статические (рис. 6) характеристики.

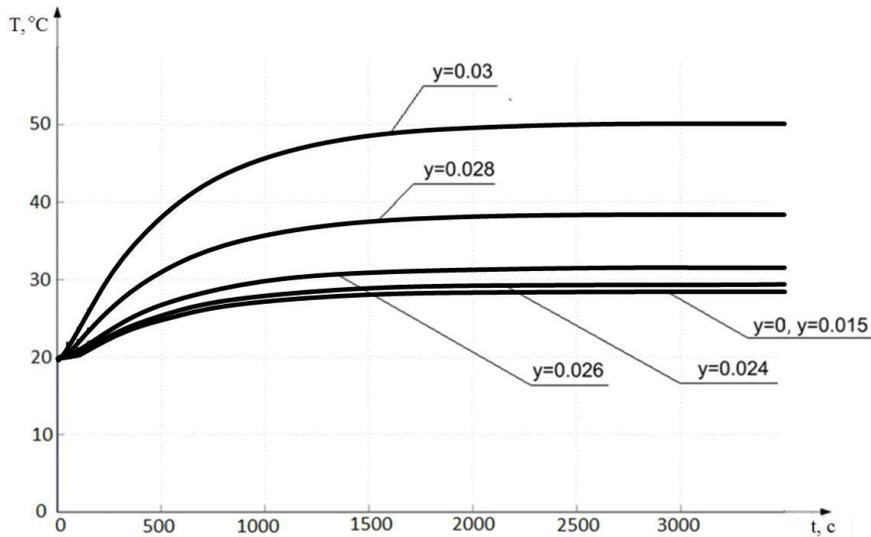


Рис. 5. Температура потока нефти третьей секции при включении индуктора

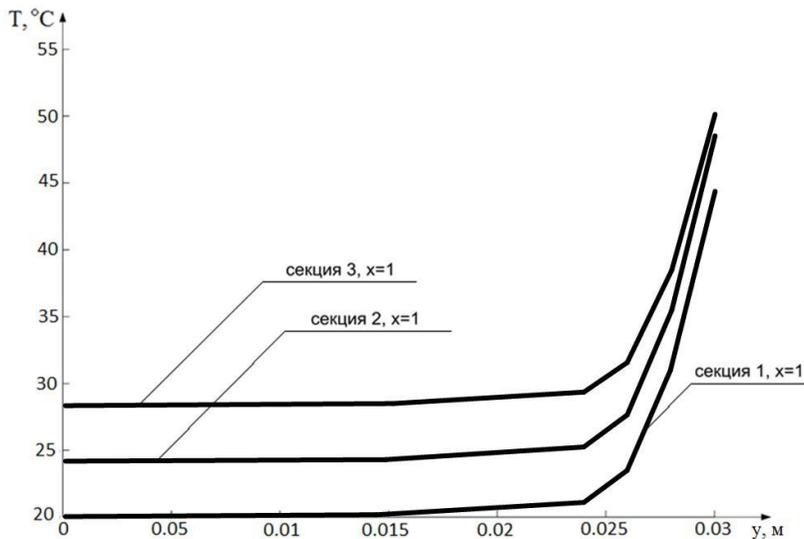


Рис. 6. Распределение температуры по толщине потока нефти на выходе каждой из секций нагревателя

После 3000 сек модели выходят в установившийся режим. На рис. 6 изображены статические характеристики модели в установившемся режиме.

На основании распределения температуры по толщине потока (см. рис. 6) можно сделать выводы, что при любом нагреве нефти посредством теплообмена ее необходимо перемешивать, так как в силу своей низкой теплопроводности она может сильно прогреться в точках соприкосновения с нагревающей поверхностью, что может привести к нарушению технологических регламентов и является

взрывоопасным, а также плохо прогревается без перемешивания вдали от них. Поэтому то, что модель позволяет получать распределение по толщине потока, является ее основным весомым преимуществом в сравнении с одномерными моделями.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
2. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
4. *Данилушкин И.А.* Применение сплайн-интерполяции пространственного распределения в численно-аналитических моделях теплообмена // Информационные, измерительные и управляющие системы (ИИУС-2012): Мат-лы III Междунар. науч.-техн. конф. 29-31 мая 2012 г. Самар. гос. техн. ун-т. – Самара, 2012. – С. 13–16.
5. *Гусева М.А.* Автоматическое управление технологическим процессом индукционного нагрева нефти в установках трубопроводного транспорта: Дис. ... канд. техн. наук / М.А. Гусева; Самар. гос. техн. ун-т. – Самара, 2012. – 136 с.
6. *Гусева М.А., Данилушкин И.А.* Применение пространственной аппроксимации распределенных сигналов при моделировании теплообменных аппаратов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2010. – № 7(28). – С. 151–157.
7. *Данилушкин И.А., Гусева М.А.* Численно-аналитическое моделирование систем с распределенными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. – № 8(137). – М.: Новые технологии, 2012. – С. 48–52.
8. *Данилушкин И.А.* Численно-аналитическое моделирование систем управления объектами с распределенными параметрами // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. X Междунар. Четаевской конф. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. I. Казань, 12–16 июня 2012 г. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – С. 332–338.

*Статья поступила в редакцию 1 октября 2014 г.*

## NUMERICAL-ANALYTICAL MODEL OF TEMPERATURE FIELDS OF FLOW-THROUGH INDUCTION OIL HEATER

*A.A. Avdeenko, S.A. Kolpaschikov*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

*The paper describes the procedure of finding expressions for temperature fields of the flow-through induction heater as an object with distributed parameters. The paper considers a formulation of two-dimensional problem in polar coordinates with further transition into Cartesian coordinates. To solve the partial differential system, the method of finite integral transformation, Laplace transformation and numerical-analytical method with using spatial spline interpolation of distribution signal are applied. A new method of realization of dynamic model of the object with distributed parameters in simulation software was proposed. The paper performs the simulation which gives basic statistic and dynamic characteristics of behavior of the heater temperature fields.*

**Keywords:** *in-line induction heater, object with distributed parameters, mathematical model, spatial transfer function, spline interpolation, finite integral transformation, numerical-analytical modeling.*

---

*Aleksey A. Avdeenko, Postgraduate Student.  
Sergey A. Kolpaschikov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*

УДК 681.5.015

## АЛЬТЕРНАНСНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ В КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ\*

*А.Н. Дилигенская*

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Рассматривается коэффициентная обратная задача теплопроводности (ОЗТ) в экстремальной постановке по идентификации переменного коэффициента температуропроводности. На основе ошибки равномерного приближения результирующего температурного распределения к требуемому задаче сводится к задаче параметрической оптимизации, соответствующей условно-корректной постановке проблемы. Идентифицируемая величина рассматривается в качестве искомого оптимального управляющего воздействия. Решение задачи оптимизации основывается на альтернансных свойствах искомым оптимальных решений и позволяет получить оптимальные значения вектора искомым параметров при заданной структуре управляющего воздействия. На тестовом примере продемонстрирована возможность практического использования предложенного метода для решения рассматриваемого типа задач.*

**Ключевые слова:** *коэффициентная обратная задача теплопроводности, условно-корректная постановка задачи, задача параметрической оптимизации, альтернансный метод.*

Решение коэффициентных ОЗТ, позволяющих идентифицировать коэффициенты уравнения теплопроводности, по сегодняшний день остается одной из актуальных задач инженерной теплофизики. Особое практическое значение имеют ОЗТ в нелинейной постановке, когда теплофизические характеристики нагреваемых изделий зависят от температуры.

Наиболее общий универсальный подход к решению нелинейных обратных задач [1-3] состоит в применении методов регуляризации решений [4, 5] на основе численного моделирования [6]. Решение ОЗТ в вариационной постановке с использованием условно-регулярных методов [7-9] в ряде случаев позволяет получить явную аналитическую форму решения или свести задачу к системе алгебраических уравнений.

В настоящей статье для решения коэффициентной ОЗТ в экстремальной постановке [1, 10], предусматривающей минимизацию функционала, являющегося мерой соответствия рассчитанного и экспериментального температурного состояния, предлагается использовать известные специальные альтернансные свойства искомым оптимальных решений [11-13].

Температурное поле  $T(x, t)$  описывается в зависимости от пространственной переменной  $x$  и времени  $t$  одномерным нелинейным уравнением нестационар-

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-00446)

Анна Николаевна Дилигенская (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

ной теплопроводности с зависящими от температуры теплофизическими характеристиками (удельной теплоемкостью  $c$ , плотностью материала  $\gamma$  и теплопроводностью  $\lambda(T)$  при стандартном допущении  $c\gamma = const$ )

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right], x \in [x_0, x_1]; t \in [0, t_k] \quad (1)$$

и соответствующими краевыми условиями. Коэффициент температуропроводности  $a(T) = \lambda(T)/c\gamma$  в (1) является функцией температуры.

ОЗТ заключается в восстановлении зависимости  $a(T)$  на основе экспериментальных данных  $T^*(t)$ , полученных в результате измерения температуры в некоторой фиксированной точке  $x^* \in [x_0, x_1]$ .

Сформулируем экстремальную постановку рассматриваемой нелинейной коэффициентной ОЗТ. По заданному температурному распределению  $T^*(t)$  требуется определить зависимость  $a(T)$ , минимизирующую невязку между  $T^*(t)$  и точным аналитическим или приближенным численным решением  $T(x^*, t)$  краевой задачи (1), соответствующим искомой функции  $a(T)$ .

Для оценки этой невязки используем ошибку равномерного приближения  $\varepsilon = \max_t |T(x^*, t) - T^*(t)|$  результирующего температурного поля к требуемому [11-13] на заданном временном интервале  $[0, t_k] \ni t$ .

Будем считать, что искомая зависимость  $a(T)$  заведомо определена в заданном классе функций переменной  $T$  с точностью до выбора некоторого вектора  $\omega = (\omega_i), i = \overline{1, n}$  постоянных параметров, например в виде, диктуемом известными аналитическими решениями нелинейной задачи теплопроводности, и, следовательно, задана известной функцией  $a(\omega)$  переменной  $\omega$ .

В этом случае решение ОЗТ может быть сведено к задаче оптимального управления, в которой вектор параметров  $\omega$  принимается за искомое управляющее воздействие.

Задача оптимального управления теперь может быть сформулирована следующим образом. Для объекта (1) с соответствующими краевыми условиями необходимо найти вектор параметров  $\omega = (\omega_i), \omega_i = const, i = \overline{1, n}$  зависимости  $a(\omega)$ , обеспечивающих на заданном интервале  $[0, t_k]$  выполнение минимаксного соотношения

$$I(\omega) = \max_{t \in [0, t_k]} |T(x^*, t, \omega) - T^*(t)| \rightarrow \min_{\omega} \quad (2)$$

Решение полученной задачи математического программирования (2) может быть осуществлено альтернансным методом, основанным на использовании специальных альтернансных свойств разности  $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$ . В соответствии с данными свойствами [11-13] для разности  $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$  на интервале  $[0, t_k]$  достигаются знакопеременяющиеся максимальные по абсолютной величине значе-

ния в точках  $t_j \in [0, t_k]$ ,  $j = \overline{1, n+1}$ , число которых на единицу превышает число  $n$  искомых параметров. На основании указанных свойств составляется замкнутая система  $n+1$  соотношений для предельных разностей температур в этих точках относительно всех неизвестных, дополненная условиями существования экстремума функции  $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$  в точках  $t_{j_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , не совпадающих с границами интервала:

$$\begin{aligned} T(x^*, t_j, \omega) - T^*(t_j) &= (-1)^j \cdot \psi \cdot I(\omega), \quad j = \overline{1, n+1}; \quad \psi = \pm 1; \\ \frac{\partial}{\partial t} [T(x^*, t_{j_i}, \omega) - T^*(t_{j_i})] &= 0, \quad \{t_{j_i}\} \in \{t_j\}, t_{j_i}, i = \overline{1, m}, m \leq n+1. \end{aligned} \quad (3)$$

При известной форме кривой невязки  $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$  на интервале наблюдения  $[0, t_k]$  система соотношений (3) трансформируется к системе уравнений, решение которой позволяет найти оптимальные значения  $\omega^*$  параметров зависимости  $a(\omega)$ , минимизирующие функционал (2).

Для подтверждения работоспособности предложенного метода рассматривалась нелинейная задача теплопроводности (1) в полуограниченной области изменения пространственной переменной  $0 \leq x < \infty$  и во времени  $0 < t \leq t_k$ , дополненная соответствующими краевыми условиями вида

$$T(x, 0), T(x, t_k) = 0, T(0, t) = T_0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Аналитическое решение нелинейной задачи (1), (4) для коэффициента температуропроводности вида

$$a(T) = \frac{\omega_1}{1 - \omega_2 T} \quad \omega_1, \omega_2 = const \quad (5)$$

и вида

$$a_0(T) = \frac{\sigma_1}{(1 - \sigma_2 T)^2} \quad \sigma_1, \sigma_2 = const \quad (6)$$

получены в [14] и приведены в [15].

При решении ОЗТ температура поверхности нагреваемого тела  $T_0$  полагается известной, а определению подлежит переменный коэффициент  $a(T)$ , структура которого имеет вид (5). Экспериментальное температурное распределение  $T^*(t)$  было получено как решение прямой задачи (1), (4) при зависимости коэффициента температуропроводности  $a_0(T)$  в виде (6).

Задача восстановления коэффициента  $a(T)$  сводится к задаче параметрической оптимизации вида (2) относительно двух искомых параметров  $\omega_1, \omega_2$ , для определения значений которых составляется при  $n=2$  система вида (3) из трех соотношений для предельных значений  $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$  в точках  $t_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$  относительно неизвестных  $\omega_1, \omega_2, I, t_2, t_3$ , с дополнительными условиями существования экстремума функции  $T(x^*, t, \omega) - T^*(t)$  в точках  $t_2$  и  $t_3$ .

Применение предложенного метода для решения рассматриваемой ОЗТ при

численных значениях  $\sigma_1 = 0.4 \cdot 10^{-6}$ ;  $\sigma_2 = 0.8 \cdot 10^{-3}$ ;  $T_0 = 400^{\circ}\text{C}$ ;  $x^* = 0.8$  позволило получить значения искомым параметров  $\omega_1 = 0.414 \cdot 10^{-6}$ ;  $\omega_2 = 0.133 \cdot 10^{-2}$  при структуре  $a(T)$  вида (5).

Приведенные результаты (рис. 1, 2) показывают удовлетворительную точность идентификации нелинейного коэффициента температуропроводности при максимальной погрешности, достигаемой в начальный момент идентификации, не превышающей 4 %.

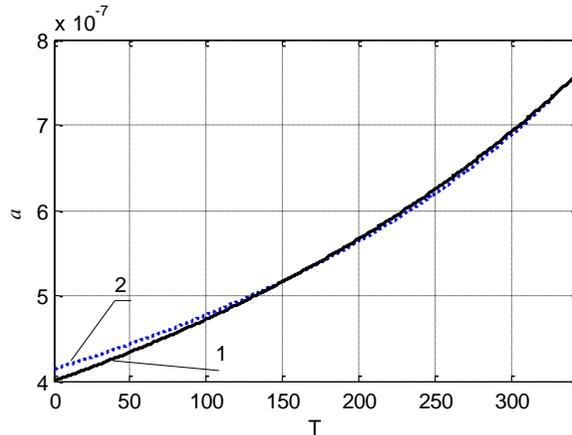


Рис. 1. Восстановление коэффициента температуропроводности:  
1 – истинное значение  $a_0(T)$ ; 2 – его аппроксимация  $a(T)$

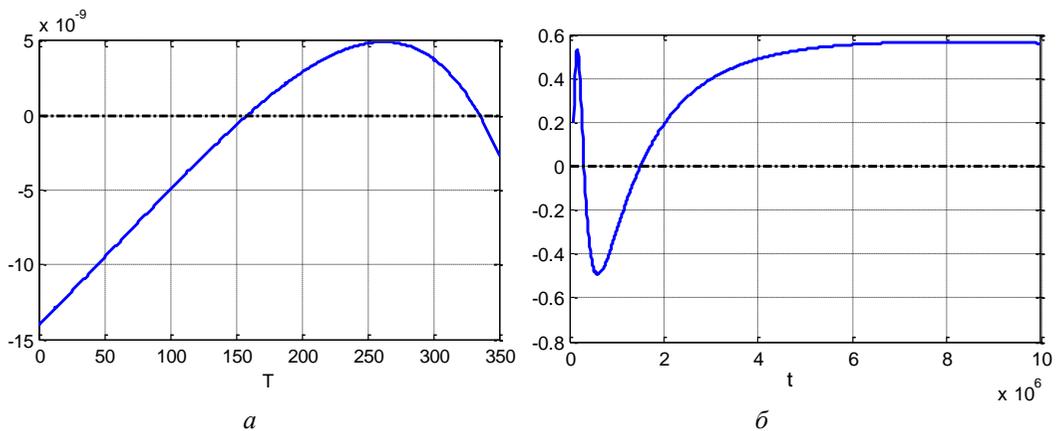


Рис. 2. Результаты решения ОЗТ:

$a$  – погрешность  $\varepsilon = a_0(T) - a(T)$  аппроксимации коэффициента температуропроводности;

$b$  – ошибка  $\varepsilon_T = T(x^*, t, a) - T^*(t)$  приближения температурного поля

Решение коэффициентных ОЗТ, сформулированных в экстремальной условно-корректной постановке, при оценке невязки между результирующим температурным полем и требуемым на основе ошибки равномерного приближения может быть сведено к решению задачи математического программирования. Для ее решения может быть использован специальный альтернативный метод оптимизации, сводящийся к решению систем уравнений, основанных на альтернативных свойствах оптимальных решений для погрешности приближения температур относительно параметров идентифицируемого воздействия.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
3. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. – Киев: Наукова Думка, 2002. – 408 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
5. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
7. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
8. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
10. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
11. Плешивецова Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Известия РАН. ТиСУ. – 2009. – № 3. – С. 22-33.
12. Рапопорт Э.Я., Плешивецова Ю.Э. Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автометрия. – 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 103–112.
13. Рапопорт Э.Я., Плешивецова Ю.Э. Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Известия РАН. Энергетика. – 2002. – № 5. – С. 144–155.
14. Fujita H. Text. Res. Jr., 22. – p. 757, 1952.
15. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

*Статья поступила в редакцию 3 октября 2014 г.*

## ALTERNANCE OPTIMIZATION METHOD IN THE COEFFICIENT INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

**A.N. Diligenskaya**

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

*This paper deals with the extremely formulated inverse heat conduction problem (IHCP); the goal is to define the variable coefficient of thermal conductivity. On the basis of error of uniform approximation of resulting temperature distribution to required distribution, the problem is formulated as parametrical optimization problem which corresponds to nominally correct formulation of problem. The value to be defined is considered as sought optimal control action. The solution of optimization problem is based on the alternance properties of sought optimal solutions and allows to obtain optimal values of sought parameters vector with stated structure of control action. Test example shows the possibility of practical use of the proposed method to solve the considered type of problems.*

**Keywords:** *Coefficient inverse heat problem, conditional-correct formulation, the problem of parametrical optimization, alternance method.*

---

*Anna N. Diligenskaya (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*

УДК 536. 2 (075)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ СЕТЕЙ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ НА КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ\*

*С.В. Колесников, И.В. Кудинов*

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

*Городские теплосети, запитываемые от ТЭЦ и котельных, представляют собой сложные разветвленные гидравлические системы. В практике их эксплуатации основными проблемами являются недостаточный перепад давлений между прямым и обратным трубопроводами, повышенное давление в обратном трубопроводе, разрегулированность сети (несоответствие расчетных и действительных расходов у потребителей теплоты) и другие проблемы. Причинами указанных проблем могут быть: повышенный расход теплоносителя, недостаточные диаметры трубопроводов, уменьшение диаметров труб из-за отложений на внутренних поверхностях, перекрытие задвижек на участках сети с большими скоростями течения теплоносителя, «паразитные» циркуляции и прочее. Решение вопроса о том, какая из этих причин является определяющей, представляется довольно сложной проблемой. Эффективным средством для наиболее достоверного определения основных причин указанных выше проблем, имеющихся в любой конкретной теплосети, являются компьютерные модели, позволяющие практически полностью воспроизводить гидравлические и температурные режимы их работы, рассматривая теплосети как единые целые гидравлические системы (с учетом любого количества внутренних кольцевых структур).*

**Ключевые слова:** *теплосеть, компьютерная модель, законы Кирхгофа, теория графов, идентификация модели, эпюры давления.*

В основе расчета сложных кольцевых гидравлических систем лежат два условия, аналогичные требованиям к расчету электрических сетей [1, 2]. Первое условие – соблюдение уравнения баланса расходов, то есть равенства притока и оттока воды в каждом узле:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0. \quad (1)$$

В эту сумму входят как расходы, отбираемые в узле, так и расходы, проходящие транзитом по линиям. Первое условие иногда формулируется так: приток воды к узлу должен равняться оттоку.

Второе условие – равенство нулю потерь напора при обходе каждого кольца:

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВПО «СамГТУ» (код проекта: 1273).

*Сергей Владимирович Колесников (к.т.н.), докторант кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».*

*Игорь Васильевич Кудинов (к.т.н.), доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».*

$$\sum_{i=1}^n h_i = 0. \quad (2)$$

Потери считаются положительными, если обход совпадает с направлением движения воды, и отрицательными, если обход не совпадает с направлением движения.

Рассмотренных соотношений формально достаточно для построения замкнутой системы уравнений относительно неизвестных расходов в ветвях сети и давлений в ее узлах. Однако система уравнений получается нелинейной и даже в простейшем случае при квадратичном законе сопротивления трудно получить ее точное решение. Поэтому в основе существующих методов расчета сложных кольцевых сетей лежат алгоритмы итерационного характера. Наиболее распространен в расчетной практике, благодаря относительно быстрой сходимости, метод поконтурной увязки перепадов давлений. Принципиально его содержание сводится к следующему.

1. Задается некоторое начальное приближение для расходов на всех ветвях расчетной многоконтурной схемы, но такое, чтобы во всех узлах соблюдалось условие (1).

2. Вычисляются потери давления на всех ветвях и их суммарные невязки во всех независимых контурах (выполнение условия (2)).

3. По выявленным невязкам тем или иным образом определяются величины так называемых контурных «увязочных расходов».

4. Каждый увязочный расход «проводится» по всем ветвям своего контура алгебраическим суммированием с расходами, принятыми по начальному приближению.

5. Расходы, полученные на последнем этапе, используются в качестве очередного приближения для начала следующей итерации вплоть до совпадения (в пределах заданной погрешности) значений всех искомых величин.

Данный алгоритм реализует описываемая ниже программа, основанная на теории графов [3]. Пусть  $G=(E,V,H)$  – конечный ориентированный граф [4], где  $E$  – множество вершин графа;  $V$  – множество дуг;  $H$  – отображение,  $H:V \rightarrow E \times E$ . Каждой дуге  $v \in V$  отображение ставит в соответствие упорядоченную пару  $h_1(v), h_2(v)$  вершин из  $E$ , где  $h_1(v)$  – начало дуги;  $h_2(v)$  – конец дуги. Следует понимать, что из вершины  $i$  выходит дуга  $v$ , если  $i = h_1(v)$ , и входит в вершину  $j$ , если  $j = h_2(v)$ .

Важным случаем ориентированного графа является входящее дерево. Следовательно,  $G$  является связным графом, в котором:

а)  $|V| = |A| - 1$ ;

б) существует вершина  $v$  (корень «дерева»), достижимая из всех остальных вершин. Пример такого «дерева» приведен на рис. 1 (вершина  $v$  на ней помечена цифрой 1).

Для описания алгоритмов используется специальная нумерация вершин и дуг «дерева», удовлетворяющая следующим требованиям:

а) номера дуги  $v$  и вершины  $h_1(v)$  совпадают;

б) если дуга с номером  $k$  входит в вершину с номером  $i$ , то  $k > i$ ;

в) если  $i$  – наименьший номер дуги, входящей в  $k$ -ю вершину, а  $j$  – наибольший, то все дуги с номерами между  $i$  и  $j$  входят в  $k$ -ю вершину.

Любое входящее «дерево» можно пронумеровать в соответствии с этими требованиями. Алгоритм перенумерации приведен в [4]. Нумерация вершин «дерева» на рис. 1 удовлетворяет этим требованиям [5].

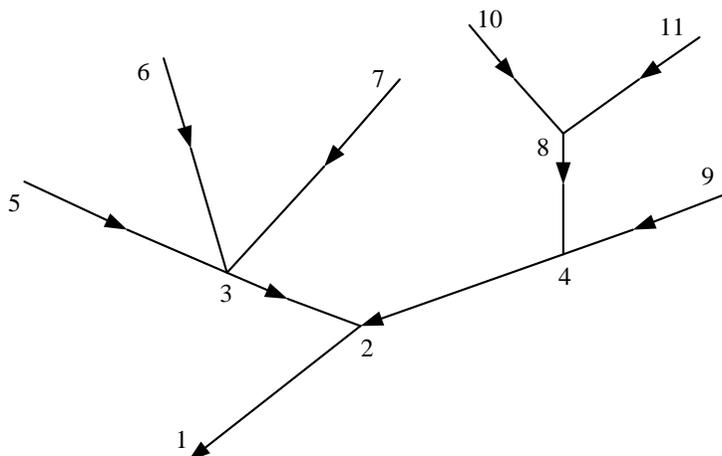


Рис. 1. Входящее «дерево» графа

Программа позволяет рассчитывать расходы и давления в любой точке с указанием направлений движения потоков по отдельным ветвям системы, анализировать работу сети при отключении отдельных ее участков, рассчитывать затраты электроэнергии на привод насосов и ее стоимость, работать на ЭВМ в диалоговом режиме [5, 6].

В соответствии с описанной выше методикой была составлена расчетная схема Ульяновских тепловых сетей и определены гидравлические характеристики их элементов. При разработке расчетной гидравлической модели за основу принята монтажная схема размещения оборудования и трубопроводов Ульяновских тепловых сетей (рис. 2).

Потери напора на участке – трубе складываются из потерь на трение (линейные) и потерь на местные сопротивления:

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} + \sum \xi \frac{w^2}{2g}, \quad (3)$$

где  $\Delta h$  – потери напора,  $\lambda$  ;  
 $\lambda$  – коэффициент трения;  
 $l$  – длина трубопровода,  $m$ ;  
 $d$  – внутренний диаметр,  $m$ ;  
 $w$  – средняя скорость,  $m/c$ ;

$\sum \xi$  – сумма коэффициентов местных сопротивлений на участке.

Введя понятие эквивалентной длины, потери напора на местные сопротивления можно свести к линейным потерям. Эквивалентная длина местных сопротивлений находится из соотношения

$$\sum \xi = \lambda \frac{l_{\text{э}}}{d}. \quad (4)$$

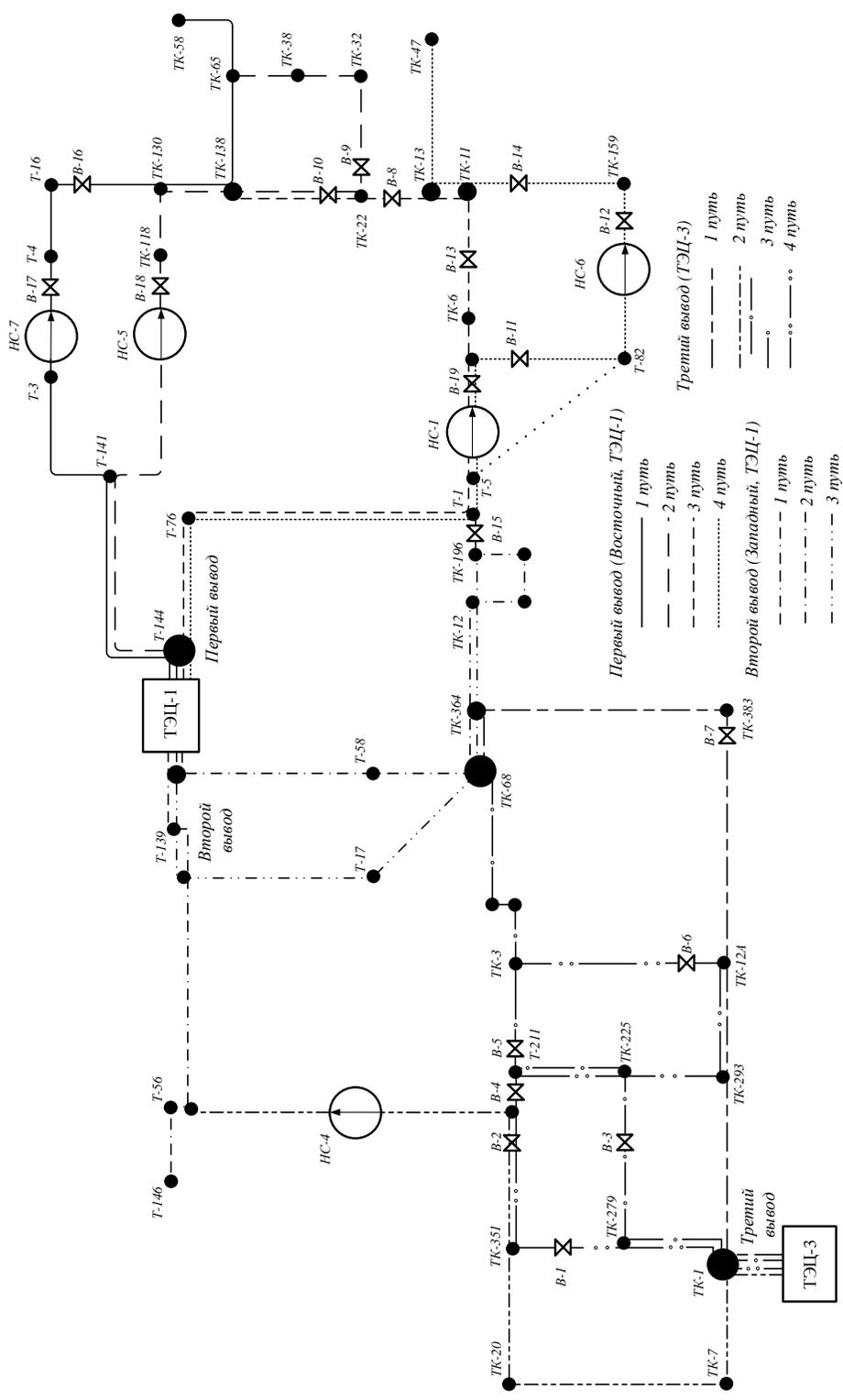


Рис. 2. Схема теплосетей Ульяновских ТЭЦ – 1 и ТЭЦ – 3. Т, ТК – тепловые камеры; НС – насосные подстанции; В – задвижки

Выражая из (4)  $l_3$ , находим

$$l_3 = \frac{d \sum \xi}{\lambda}. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\Delta h = \frac{w^2}{2g} \left( \lambda \frac{l}{d} + \lambda \frac{l_3}{d} \right) = \frac{\lambda w^2}{d 2g} (l + l_3).$$

Если расход жидкости через участок  $Q = ws$ , где  $s = \pi d^2 / 4$  – площадь сечения трубы, то

$$w = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta h = \frac{16Q^2 \lambda (l + l_3)}{2g \pi^2 d^4} = \frac{8\lambda (l + l_3)}{\pi^2 g d^5} Q^2.$$

Таким образом, гидравлическая характеристика участка – трубы имеет вид

$$\Delta h = sQ^2, \quad (6)$$

где  $s = \frac{8\lambda(l + l_3)}{\pi^2 g d^5}$  – гидравлическое сопротивление участка,  $c^2/m^5$ .

В соответствии с требованиями программы гидравлического расчета теплосети для каждого участка – трубы должна быть введена следующая информация:  $d$  – диаметр;  $l$  – длина; тип и количество местных сопротивлений.

Поскольку гидравлические режимы трубопроводов теплосети лежат в квадратичной области сопротивления, коэффициент трения  $\lambda$  рассчитывался по формуле Шифринсона

$$\lambda = 0,11 \left( \bar{\Delta} \right)^{0,25},$$

где  $\bar{\Delta} = e/d$  – относительная шероховатость труб;  
 $e$  – абсолютная шероховатость.

Гидравлическая характеристика участка – задвижки имеет вид (6), где  $s$  – коэффициент местного сопротивления задвижки, зависящий главным образом от степени ее открытия.

Для полностью открытой задвижки коэффициент местного сопротивления принят равным 0,07. Степень открытия той или иной задвижки определяется соответствующей оперативной ситуацией, связанной с распределением давления на участке сети после задвижки.

Участки – насосы в расчетной схеме гидравлической сети представлены своими аналитическими характеристиками, связывающими между собой напор, развиваемый насосом, и подачу. Кривую  $Q$ – $H$  насоса с достаточной для практики точностью можно выразить уравнением вида [2]

$$H = H_{\phi} - Q_n^m S_{\phi}, \quad (7)$$

где  $H_{\phi}$  – напор, развиваемый насосом при закрытой на выходе задвижке ( $Q_n = 0$ );

$Q_1$  – подача насоса,  $m^3/c$ ;

$S_\phi$  – гидравлическое сопротивление насоса.

Показатель степени  $m$  принимается равным 2 или 1,85. Как показано в [2], в обоих случаях получается удовлетворительное согласование с паспортными данными.

Некоторые авторы [4] предлагают для аналитического определения рабочей характеристики насоса использовать вместо параболической зависимости (7) зависимость в виде более сложного полинома

$$H = a_0 + a_1Q + a_2Q^2.$$

Однако в расчетной практике более распространена простейшая зависимость вида (7), позволяющая с достаточной точностью описывать характеристику насоса. В настоящей работе для аналитического описания рабочих характеристик циркуляционных насосов использовалась зависимость

$$H = H_\phi - S_\phi Q_n^2. \quad (8)$$

Искомые параметры  $H_\phi$  и  $S_\phi$  рассчитывались по двум произвольным точкам характеристики насоса, взятой из каталога, с использованием следующих соотношений:

$$S_\phi = \frac{H_a - H_b}{Q_b^2 - Q_a^2}; \quad H_\phi = H_a + S_\phi Q_a^2.$$

Число оборотов насоса  $n$  и диаметр его рабочего колеса  $D$  могут отличаться от приведенных в каталоге. В этом случае полученная аналитическая характеристика насоса имеет смысл базовой, а действительные параметры  $H_\phi^*$  и  $S_\phi^*$  находятся путем пересчета по формулам

$$S_\phi^* = S_\phi; \quad H_\phi^* = H_\phi \left( \frac{D^*}{D} \right)^2 \left( \frac{n^*}{n} \right)^2,$$

где  $S_\phi^*, H_\phi^*, n^*$  – параметры истинной характеристики;

$S_\phi, H_\phi, n$  – соответствующие параметры базовой характеристики.

При создании модели первоначально используются паспортные характеристики элементов теплосетей (шероховатость трубопроводов, характеристики задвижек, насосов и проч.). В принципе, на такой модели можно проводить исследования большого числа вариантов работы тепловыводов с целью их сравнения между собой и выбора из них оптимального. Такая модель (будем называть ее моделью теплосети с паспортными характеристиками) для выбора оптимального варианта работы предпочтительнее модели реальной теплосети (то есть теплосети с учетом ее реальных сопротивлений), так как в реальной теплосети могут иметь место несистематические сопротивления, возникающие и исчезающие во внеплановом порядке. Например, прикрытие задвижек потребителями, находящимися на возвышенных участках местности, с целью повышения низкого для них давления в обратной магистрали. Моделирование реальной теплосети необходимо для того, чтобы знать действительную картину распределения давлений и расходов в данный конкретный момент времени. Если в следующий момент времени происходят изменения от действия каких-либо факторов, то для создания адекватной модели эти факторы должны быть в ней учтены. Поэтому необ-

ходимым условием создания компьютерной модели реальной теплосети является наличие экспериментальных данных по давлениям теплоносителя в различных точках теплосети. С использованием этих данных на модели подбираются сопротивления трубопроводов (их шероховатость) и степень закрытия задвижек так, чтобы результаты, получаемые из расчета на модели, совпадали с экспериментальными данными.

Для получения модели реальной теплосети использовались результаты экспериментов, проведенных в Ульяновских тепловых сетях. Экспериментальные данные были использованы для идентификации компьютерной модели. Как показали расчеты, точность идентификаций находится в пределах 2–3 %.

Общая протяженность первого вывода первого пути от ТЭЦ–1 до ТК–58 составляет около 10 км (см. рис. 2, 3). Диаметры трубопроводов изменяются от 1200 до 300 мм, отметки высот – от  $h = 115\text{ м}$  до  $h = 200\text{ м}$ . В работе находится повысительная насосная НС–7. Идентификация модели (приближение компьютерной модели к реальной теплосети) выполнялась при использовании экспериментальных данных по расходам и давлениям в различных точках сети. Результаты расчетов реального режима работы первого пути первого вывода представлены на графиках (рис. 3). Их анализ позволяет заключить, что основной проблемой здесь является низкое давление в обратном трубопроводе. Так, например, на участке от камеры Т–6 до ТК–130 пьезометрическое давление в обратном трубопроводе оказывается ниже отметки высоты расположения трубопровода, то есть избыточное давление оказывается отрицательным, что может привести к остановке циркуляции теплоносителя. Варианты работы теплосети, позволяющие найти пути решения этой проблемы, рассмотрены далее.

Общая протяженность второго пути первого вывода составляет около 10 км. Диаметры трубопроводов изменяются от 1200 до 300 мм, отметки высот – от  $h = 115\text{ м}$  до  $h = 180\text{ м}$ . В работе находится повысительная насосная НС–5 (рис. 2, 4). Результаты расчетов пьезометрических давлений второго пути первого вывода даны на рис. 4. Их анализ позволяет заключить, что одной из проблем здесь, так же как и для первого пути, является пониженное давление в обратном трубопроводе. И, в частности, на участке от ТК–130 до ТК–138 оно оказывается практически равным отметке высоты местности. Здесь, как и на первом пути, могут возникать проблемы, связанные с остановкой циркуляции теплоносителя ввиду его вскипания.

Третий путь первого вывода имеет протяженность около 9 км. Диаметры трубопроводов изменяются от 1200 до 600 мм, отметки высот – от  $h = 115\text{ м}$  до  $h = 160\text{ м}$ . В работе находится повысительная насосная НС–1 (рис. 2, 5).

Результаты расчетов третьего пути первого вывода даны на рис. 5. Их анализ позволяет заключить, что на этом пути основной проблемой является пониженное давление в обратном трубопроводе в районе камеры ТК–138.

Общая протяженность четвертого пути первого вывода составляет около 11300 м. Диаметры трубопроводов изменяются от 1200 до 300 мм, отметки высот – от  $h = 115\text{ м}$  до  $h = 160\text{ м}$ . В работе находится повысительная насосная НС–1 и понизительная НС–6 (рис. 2, 6).

Результаты расчетов четвертого пути первого вывода даны на рис. 6. Понижительная насосная НС–6 используется для уменьшения давления в обратном трубопроводе на участке от Т–82 до ТК–159, где имеет место пониженная отметка высоты местности ( $h = 160\text{ м}$ ).

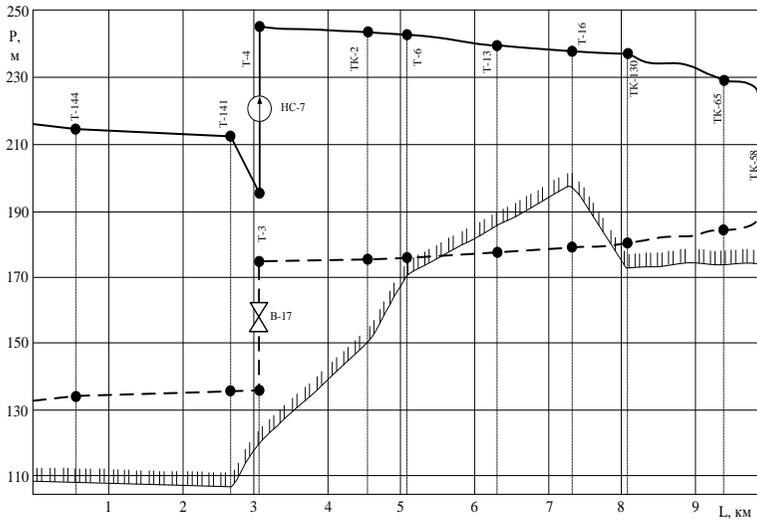


Рис. 3. Первый вывод, первый путь. Задвижка В-8 закрыта. Задвижки В-11, В-14 прикрыты.  – отметка высоты местности

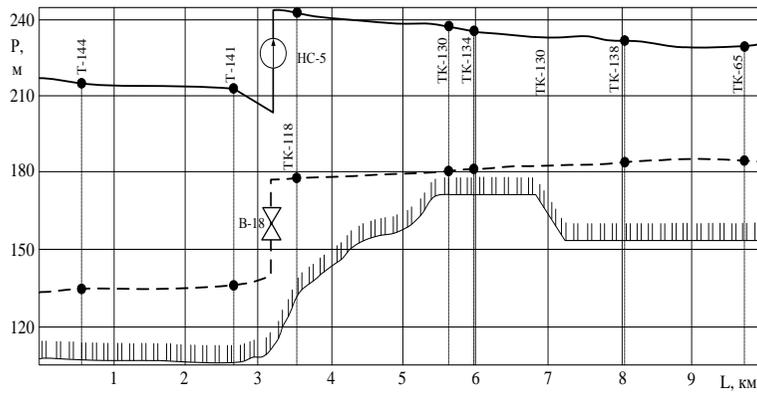


Рис. 4. Первый вывод, второй путь. Задвижки В-11, В-14 прикрыты

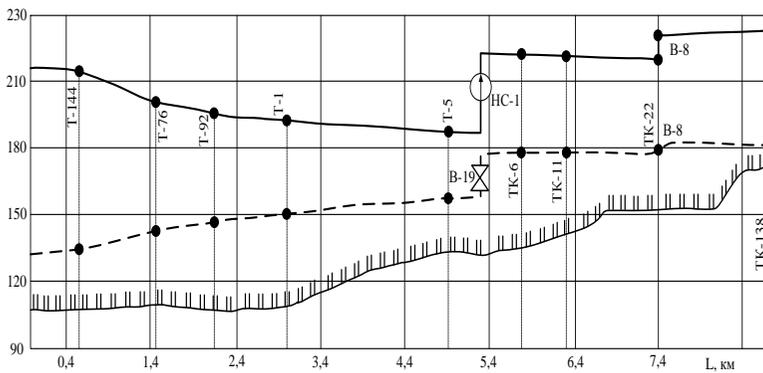


Рис. 5. Первый вывод, третий путь. Задвижка В-8 закрыта. Задвижки В-11, В-14 прикрыты

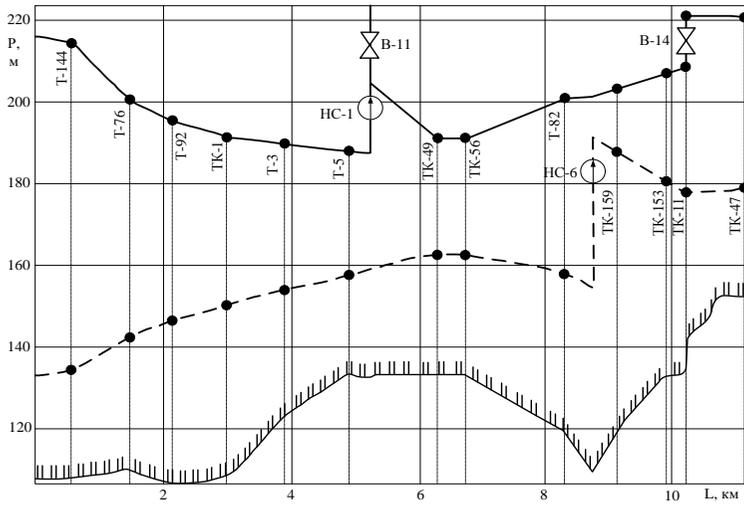


Рис. 6. Первый вывод, четвертый путь. Задвижка В-8 закрыта. Задвижки В-11, В-14 прикрыты.  – отметка высоты местности

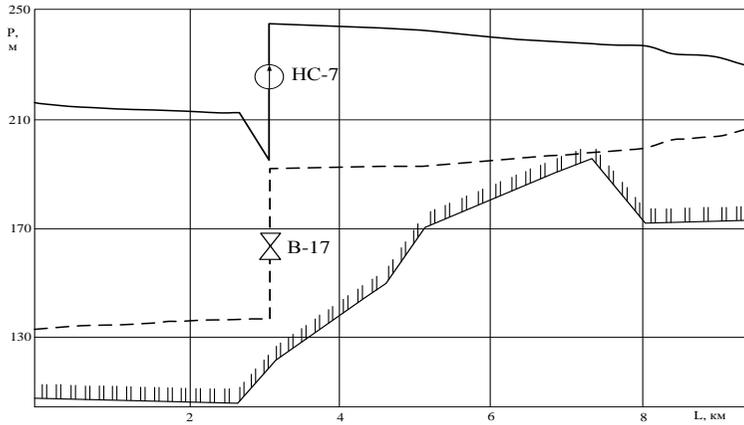


Рис. 7. Первый вывод, первый путь. Задвижка В-8 открыта на обратном трубопроводе. Задвижка В-13 прикрыта на обратном трубопроводе

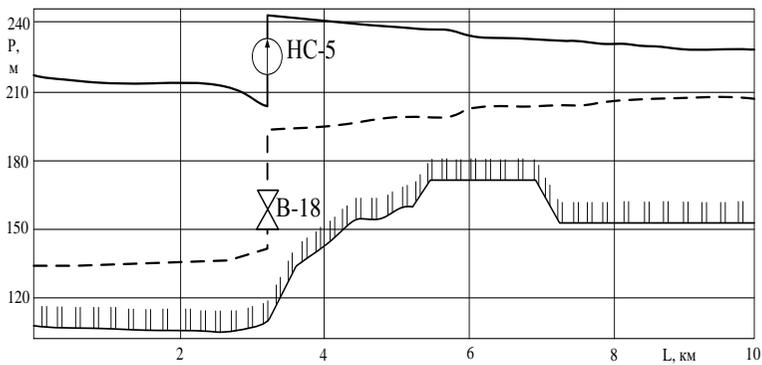


Рис. 8. Первый вывод, второй путь. Задвижка В-8 открыта на обратном трубопроводе. Задвижка В-13 прикрыта на обратном трубопроводе

На рис. 7, 8 представлены расчеты различных вариантов работы теплосети с целью устранения отмеченных выше проблем. И, в частности, рассмотрен вариант работы теплосети для случая, когда задвижка В-13 (см. рис. 2) прикрыта на обратной магистрали. Цель этого исследования заключается в перераспределении потоков в обратных трубопроводах первого, второго и третьего путей. В реальном режиме работы через обратные трубопроводы в районе насосных НС-1, НС-5, НС-7 наблюдаются следующие расходы теплоносителя: НС-1 – 1400 т/час; НС-5 – 1100 т/час; НС-7 – 670 т/час.

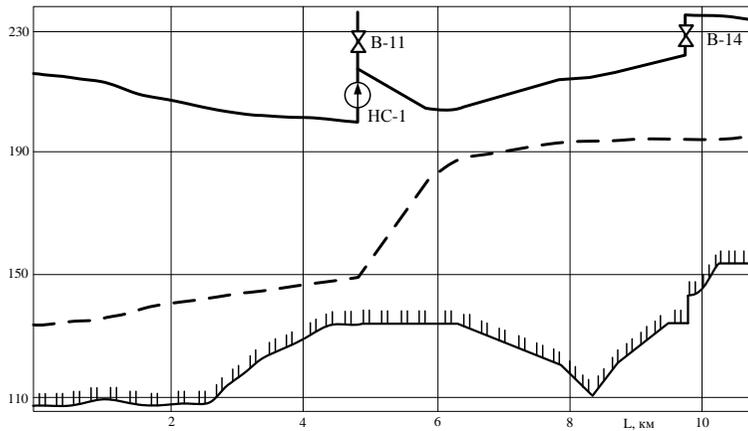


Рис. 9. Первый вывод, третий путь. Задвижка В-8 открыта на обратном трубопроводе. Задвижка В-13 прикрыта на обратном трубопроводе. Насосная НС-6 отключена

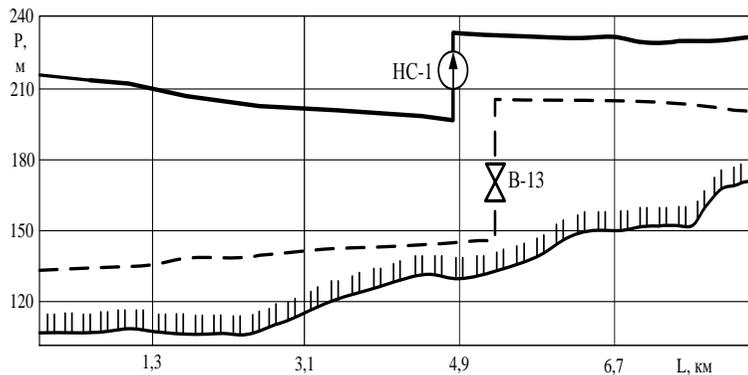


Рис. 10. Первый вывод, четвертый путь. Задвижка В-8 открыта на обратном трубопроводе. Задвижка В-13 прикрыта на обратном трубопроводе. Насосная НС-6 отключена

Из этих данных следует, что потоки в обратных трубопроводах вблизи насосных НС-7 (первый путь) и НС-5 (второй путь) существенно меньше, чем вблизи насосной НС-1 (третий путь). В то же время давление в обратных трубопроводах первого и второго путей оказывается настолько заниженным, что происходит пересечение эпюр давлений с отметками высоты местности (см. рис. 3, 4). Увеличив потоки на этих путях, можно поднять и давление на них. Результаты расчетов такого варианта (см. рис. 7, 8) позволяют заключить, что давление в обратных трубопроводах первого, второго и третьего путей в результате такого перераспределения потоков значительно повышается.

На рис. 9, 10 представлены результаты расчетов работы теплосети без пониженной насосной НС-6 (см. рис. 2). Их анализ позволяет заключить, что теплосеть в данном случае оказывается вполне работоспособной. Таким образом,

благодаря перераспределению потоков теплоносителя, выполненному с помощью компьютерной модели, удалось найти оптимальный режим работы теплосети, исключив при этом понизительную насосную НС–6.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Абрамов Н.Н.* Теория и методика расчета системы подачи и распределения воды. – М.: Стройиздат, 1972. – 286 с.
2. *Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумарокова С.В. и др.* Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. – Новосибирск: ВО Наука, Сиб. издат. фирма, 1992. – 407 с.
3. *Зыков А.А.* Теория конечных графов. – Новосибирск: Наука; СО, 1969. – 543 с.
4. *Коваленко А.Г., Туева Н.С.* Система синтеза и анализа гидравлических сетей. – М.: Вычисл. центр АН СССР, 1989. – 70 с.
5. *Кудинов В.А., Коваленко А.Г., Колесников С.В., Панамарев Ю.С.* Разработка компьютерной модели и исследование режимов работы циркуляционной системы Новокуйбышевской ТЭЦ–2 // Изв. АН. Энергетика. – 2001. – № 6. – С. 118–124.
6. *Колесников С.В., Дикоп В.В., Томкин С.Н., Кудинов В.А.* Исследование гидравлических режимов работы циркуляционной системы Тольяттинской ТЭЦ на компьютерной модели // Изв. вузов СНГ. Энергетика. – 2002. – № 6. – С. 90–95.

*Статья поступила в редакцию 2 сентября 2014 г.*

## RESEARCH OF CENTRAL HEATING NETWORK USING COMPUTER MODEL

***S.V. Kolesnikov, I.V. Kudinov***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

*Urban heating networks powered by heating and power plant and boilers are complex brachigerous hydraulic systems. The main problems of their operation are insufficient pressure difference between direct and reverse pipelines, increased pressure in reverse pipeline, the deregulation of network (the discrepancy between the estimated and actual costs for heat consumers) and others. These problems can be caused by: excessive consumption of heat carrier, insufficient pipeline diameters, reduction of pipelines diameters as the result of deposits on their inner surfaces, the valves overlap in network sections with high velocities of heat carrier flow, parasitic circulation, etc. The problem of define which of the abovementioned problems is critical is quite complex. Computer models that allow the complete simulation of hydraulic and temperature modes of heating networks are the most effective and precise way to determine the main causes of the abovementioned problems that occur in every heating network. These models consider the heating network as the unified hydraulic systems (taking into account any number of inner ring structures).*

***Keywords:*** computer model, graph theory, Kirchhoff's laws, heating systems (HS) of the centralized heat supply, pressure loss, hydraulic resistance.

---

*Sergey V. Kolesnikov (Ph.D. (Techn)), doctoral student.  
Igor V. Kudinov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*