

Энергетика

УДК 532.517.2

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В АППАРАТЕ С ТУРБИННОЙ МЕШАЛКОЙ РАШТОНА

Н.А. Газизуллин

Казанский национальный исследовательский технологический университет
Россия, 420015, г. Казань, ул. К. Маркса, 68

Методом контрольных объемов выполнено численное моделирование ламинарного течения вязкой жидкости в аппарате с турбинной мешалкой Раштона. В ходе итерационной процедуры решения проведены расчеты формы свободной поверхности жидкости. Результаты представлены в виде линий тока вторичной циркуляции жидкости.

Ключевые слова: *перемешивание жидкости, турбинная мешалка Раштона, метод контрольных объемов, свободная поверхность, циркуляция жидкости, линии тока.*

Аппараты с механическими перемешивающими устройствами широко используются в ряде отраслей промышленности при проведении различных технологических процессов [1, 2]. Перемешивание в жидких средах оказывает влияние на теплообменные и массообменные процессы, а также на результаты химических процессов. Методы расчета, применяемые для решения задач перемешивания, непосредственно связаны с использованием гидродинамических характеристик потока. Результаты гидродинамического расчета представляют собой основу для расчета таких практически важных характеристик, как время перемешивания, скорость протекания процессов переноса перемешиваемых веществ, потребляемая на перемешивание мощность и коэффициенты теплопередачи.

Широкую область применения находят турбинные мешалки, которые пригодны для перемешивания жидкостей в большом диапазоне изменения вязкостей. Их используют для образования взвесей, растворения веществ, интенсификации теплопередачи и в ряде других случаев. Турбинные мешалки снабжены лопатками и имеют четко очерченный ротор. В зависимости от способа крепления лопаток и их конфигурации существуют различные типы турбинных мешалок. Наиболее простой и в то же время эффективной является турбинная мешалка Раштона, представляющая собой мешалку с прямыми лопатками, расположенными радиально [2]. Лопатки могут быть приварены к диску или прикреплены с помощью болтов (рис. 1).

При вращательном движении жидкости в аппарате с мешалкой происходит образование центральной вихревой воронки, глубина которой постепенно увеличивается с возрастанием угловой скорости жидкости. Перемешивание при

Назым Абдуллович Газизуллин (к.т.н.), доцент кафедры «Высшая математика».

образовании воронки связано с рядом трудностей. Если глубина воронки становится сопоставимой с глубиной установки мешалки, то в жидкость могут быть погружены только концы лопастей. Это приводит к увлечению воздуха в жидкость и образованию газожидкостной смеси в области мешалки. В результате ударов, получаемых мешалкой при работе в этой среде переменной плотности, вал мешалки начинает колебаться. Возникающие динамические нагрузки отрицательно сказываются на надежности подшипников и уплотнений вала. Отрицательные явления, связанные с образованием воронки, практически исключаются, если поверхность воронки располагается выше мешалки. Поэтому расчет формы и глубины воронки представляет несомненный практический интерес.

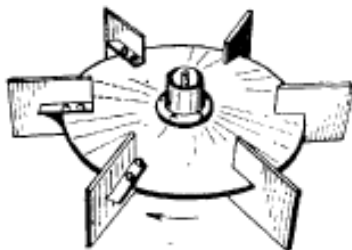


Рис. 1. Турбинная мешалка Раштона

Первые результаты исследований образования воронки в аппаратах с мешалками относятся к работам С.Я. Гзовского [3, 4]. Для определения формы и глубины воронки он впервые получил уравнение, решение которого, однако, возможно лишь на основе данных о распределении профиля окружной скорости. Позднее в работе [5] в приближенной аналитической форме были предложены зависимости распределения окружных скоростей для некоторых типов мешалок, позволившие провести расчеты глубины воронки. Следует отметить также монографию [6], автор которой приводит критериальные зависимости для расчета предельной частоты вращения вала мешалки, когда воронка достигает ступицы мешалки.

В последние годы в связи с бурным развитием вычислительной техники стало возможным численное моделирование течений в аппаратах с перемешивающими устройствами. Одной из основных проблем при этом является построение расчетных сеток. Наличие свободной границы в области течения вызывает необходимость построения подвижной адаптивной сетки, подстраивающейся на каждом итерационном шаге к форме этой границы. В этом случае на каждой итерации приходится также учитывать перемещение узлов сетки внутри области. Такой подход реализован в работах [7, 8], в которых на основе численного моделирования турбулентных течений с использованием различных моделей турбулентности представлены результаты расчетов формы свободной поверхности жидкости в аппаратах с турбинными мешалками. В настоящей работе использован альтернативный подход, основанный на преобразовании координат для отображения физической области на расчетную область с известными границами. Это позволяет проводить расчеты на фиксированной сетке, а также дает возможность использовать в расчетах равномерную сетку.

В данной работе проведено численное моделирование ламинарного течения несжимаемой вязкой жидкости в аппарате с турбинной мешалкой Раштона с

учетом образования центральной воронки.

Исходными уравнениями, описывающими течение жидкости в аппарате, являются уравнения Навье – Стокса и неразрывности [9]:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Введем подвижную, связанную со вращающейся мешалкой, цилиндрическую систему координат r, φ, z , в которой компоненты вектора скорости обозначим соответственно через u, v, w . Проекция объемной силы в подвижной системе координат содержит ускорение Кориолиса и центробежное ускорение, а также ускорение силы тяжести, и имеют вид

$$F_r = \rho(\omega^2 r + 2\omega v), \quad F_\varphi = -2\rho\omega u, \quad F_z = -\rho g.$$

Граничные условия на свободной поверхности включают в себя кинематическое и динамическое условия. Кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial r} + w, \quad (3)$$

где h – высота свободной поверхности над мешалкой, свидетельствует о том, что скорость движения свободной поверхности в направлении нормали к ней совпадает с нормальной составляющей скорости движения жидкости [10]. Динамическое условие является условием равенства сил, действующих на свободную поверхность [11]. Будем предполагать, что силы поверхностного натяжения незначительны, так как радиус кривизны поверхности жидкости в аппарате достаточно велик. Тогда динамическое условие может быть записано в виде

$$\vec{n} \cdot P = -p_0 \vec{n} \cdot I, \quad (4)$$

где P – тензор напряжений;

I – единичный тензор;

p_0 – атмосферное давление,

а вектор нормали к свободной поверхности жидкости

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{\partial h}{\partial r}; 0; 1 \right\}.$$

Граничные условия для составляющих скорости на твердых стенках заключаются в отсутствии относительного движения жидкости и твердой поверхности. Тогда на дне и боковой стенке аппарата

$$u = 0, \quad v = -\omega r, \quad w = 0,$$

а на поверхности вала и мешалки соответственно

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

где ω – угловая скорость вращения вала и мешалки.

На оси вращения потока под мешалкой примем

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Начальные условия в задаче зададим в виде

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad p=0.$$

Поскольку форма свободной поверхности жидкости неизвестна и должна быть найдена в результате расчетов, то перейдем от физической области течения к расчетной области с известными границами. Для этого физическую область поделим на две подобласти, нижнюю и верхнюю, горизонтальным сечением, проведенным через верхнюю поверхность мешалки. Введем безразмерные координаты и функции:

$$t^* = \pi n t, \quad r^* = \frac{r}{d}, \quad \varphi^* = \varphi, \quad z^* = \begin{cases} \frac{z}{d} & , \quad z \leq H + b \\ \frac{z - H - b}{h} & , \quad z > H + b \end{cases},$$

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{\pi n d}, \quad p^* = \frac{p - p_0}{\rho(\pi n d)^2},$$

где n – число оборотов мешалки в единицу времени;

H – высота расположения мешалки над дном аппарата;

b – высота лопасти мешалки, а в качестве характерной длины и характерной скорости потока выбраны соответственно диаметр мешалки d и окружная скорость (в неподвижной системе координат) конца лопасти $\pi n d$. Заметим, что свободной поверхности жидкости соответствует при этом значение $z^* = 1$.

После преобразования координат уравнение неразрывности (2) сохранит форму

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0,$$

в которой проекции вектора скорости в расчетной области определяются как

$$U = \gamma u^*, \quad V = \gamma v^*, \quad W = w^* - u^* z^* \frac{\partial \gamma}{\partial r^*},$$

где $\gamma = 1$ для нижней подобласти и $\gamma = h^*$ для верхней подобласти;

$h^* = h/d$, а u^* , v^* , w^* – компоненты вектора скорости в безразмерной физической области, определяемой преобразованием

$$r^* = \frac{r}{d}, \quad \varphi^* = \varphi, \quad z^* = \frac{z}{d}.$$

В безразмерных переменных уравнению движения (1) в сочетании с уравнением неразрывности (2) соответствуют три уравнения в координатной форме относительно искомых функций u^* , $r^* v^*$, w^* , которые могут быть записаны в виде обобщенного уравнения переноса

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t^*} + \frac{1}{\gamma r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U \Phi) + \frac{1}{\gamma r^*} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} (V \Phi) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z^*} (W \Phi) = \\ & = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\Gamma r^* \frac{\partial \Phi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} \left(\frac{\Gamma}{r^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} \right) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \right) + S_\Phi, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Gamma = 1/(\pi Re)$ – коэффициент диффузии;

$Re = \rho n d^2 / \mu$ – центробежное число Рейнольдса;

n – число оборотов мешалки в единицу времени;

S – член типа источника, который соответствует искомой функции Φ и определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
S_{u^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{v^{*2}}{r^*} - \frac{\Gamma}{r^{*2}} \left(u^* + 2 \frac{\partial v^*}{\partial \varphi^*} \right) + \frac{z^*}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{\Gamma z^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{r^*}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \right) \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \\
&\quad - \frac{2\Gamma z^*}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^* \partial z^*} + \Gamma z^* \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(z^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) + 4(r^* + v^*), \\
S_{r^* v^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial \varphi^*} + \frac{2\Gamma}{r^*} \left[\frac{\partial u^*}{\partial \varphi^*} - \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^*) \right] - \frac{\Gamma z^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{r^*}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \right) \frac{\partial}{\partial z^*} (r^* v^*) - \\
&\quad - \frac{2\Gamma z^*}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \frac{\partial^2}{\partial r^* \partial z^*} (r^* v^*) + \Gamma z^* \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left[z^* \frac{\partial}{\partial z^*} (r^* v^*) \right] - 4r^* u^*, \\
S_{w^*} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{\Gamma z^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{r^*}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \right) \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \\
&\quad - \frac{2\Gamma z^*}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^* \partial z^*} + \Gamma z^* \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r^*} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(z^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) - \frac{1}{\pi^2 Fr},
\end{aligned}$$

где $Fr = n^2 d/g$ – центробежное число Фруда.

Численное моделирование течения проведем методом контрольных объемов в сочетании с алгоритмом *SIMPLE* [12]. Метод контрольных объемов основан на том, что расчетную область разбивают на конечное число контрольных объемов (ячеек) таким образом, чтобы каждая узловая точка содержалась в отдельной ячейке. Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объему. Поэтому одним из основных достоинств этого метода является то, что он обеспечивает интегральное сохранение физических законов для всей расчетной области.

Размещение всех узловых функций в одних и тех же точках приводит к дополнительным вычислительным трудностям, связанным с рассогласованием полей скорости и давления. Поэтому выберем разнесенную сетку, в которой точки, где определяются радиальная, тангенциальная и осевая составляющие скорости, смещены на полшага в соответствующих направлениях относительно основных точек, в которых определяется давление [13]. Это позволяет точно записать дискретный аналог уравнения неразрывности, а также точно рассчитать градиенты давления в уравнениях движения.

Алгоритм *SIMPLE* представляет собой итерационную процедуру для расчета полей скорости и давления. При этом итерационная процедура рассматривается как метод установления для решения нестационарных уравнений с целью получения стационарного решения. Проинтегрируем обобщенное уравнение (5) по контрольному объему и временному интервалу Δt^* . В результате получим дискретный разностный аналог, который связывает значения искомой функции Φ в узловой точке P с ее значениями в центрах E, W, N, S, T, B смежных ячеек в форме

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_T \Phi_T + a_B \Phi_B + S_P \Delta V, \quad (6)$$

где ΔV – объем ячейки;

S_P – узловое значение источника члена.

Для расчета формы свободной поверхности жидкости воспользуемся методикой, предложенной ранее применительно к дисковой мешалке [14] и основанной на использовании динамического условия (4) в проекции на нормаль:

$$\frac{\partial h^*}{\partial r^*} = \frac{\left(\frac{\partial h^*}{\partial r^*}\right)^2 \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \left[1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial r^*}\right)^2\right] \left(\frac{p^* \text{Re}}{2} + \frac{1}{h^*} \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial r^*}\right)^2\right] \frac{1}{h^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*}}. \quad (7)$$

Будем полагать, что краевые углы смачивания вала и боковой стенки аппарата прямые. Это позволяет считать, что в любой момент времени в непосредственной близости от вала и стенки будут справедливы равенства

$$h^*(t^*, r_s^*) = h^*(t^*, r_s^* + \Delta r^*), \quad h^*(t^*, R^*) = h^*(t^*, R^* - \Delta r^*), \quad (8)$$

где r_s – радиус вала; R – радиус аппарата.

В правой части соотношения (7) используем кинематическое условие (3). Тогда получим

$$\frac{\partial h^*}{\partial r^*} = \frac{\left(\frac{w^*}{u^*} - \frac{1}{u^*} \frac{\partial h^*}{\partial t^*}\right)^2 \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \left[1 + \left(\frac{w^*}{u^*} - \frac{1}{u^*} \frac{\partial h^*}{\partial t^*}\right)^2\right] \left(\frac{p^* \text{Re}}{2} + \frac{1}{h^*} \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)}{\left[1 + \left(\frac{w^*}{u^*} - \frac{1}{u^*} \frac{\partial h^*}{\partial t^*}\right)^2\right] \frac{1}{h^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*}}. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) проводилось на каждой итерации методом Рунге – Кутты [15] при начальном условии $h_0^* = h^*(t^* - \Delta t^*, r_s^* + \Delta r^*)$ с учетом условий (8) при фиксированном значении производной $\partial h^*/\partial t^*$, взятом с предыдущей итерации. При вычисленных на k -й итерации по уравнению (9) значениях высоты свободной поверхности $h_i^{*(k)}$ может не выполняться условие постоянства объема жидкости в аппарате (при этом достаточно учитывать объем жидкости над мешалкой). Таким образом, возникает необходимость введения некоторой поправки $\delta h^{(k)}$ к значениям $h_i^{*(k)}$ на каждом итерационном шаге. Эта поправка находилась из соотношения

$$V_0 - V^{(k)} = \pi \left(R^{*2} - r_s^{*2} \right) \delta h^{(k)}, \quad (10)$$

где V_0 – объем жидкости над мешалкой с невозмущенной свободной поверхностью;

$V^{(k)}$ – объем жидкости над мешалкой на k -й итерации, который вычислялся на каждой итерации путем численного интегрирования по значениям $h_i^{*(k)}$;

i – индекс нумерации узлов расчетной сетки в радиальном направлении.

Следует отметить, что в соответствии с формулой (10) поправка $\delta h^{(k)}$ не влияет на форму свободной поверхности, а лишь корректирует ее по высоте. Окончательно с учетом поправки $\delta h^{(k)}$ скорректированные значения высоты свободной поверхности $h_i^{*(k)}$ могут быть найдены как

$$h_i^{*(k)} = h_i^{***(k)} + \delta h^{(k)}.$$

Алгоритм *SIMPLE* содержит циклическую последовательность действий типа «предположение – коррекция». Поэтому на каждой итерации компоненты

скорости определялись в два этапа. Вначале из уравнений (6) вычислялись предварительные значения компонент скорости, не удовлетворяющие уравнению неразрывности. С учетом приближенного решения для скорости находилась поправка к давлению δp из уравнения

$$a_P \delta p_P = a_E \delta p_E + a_W \delta p_W + a_N \delta p_N + a_S \delta p_S + a_T \delta p_T + a_B \delta p_B + b_P, \quad (11)$$

представляющего собой дискретный аналог уравнения неразрывности.

Затем с учетом поправок δp рассчитывались скорректированные значения компонент скорости и давления по формуле

$$p^* = p^{**} + \alpha \delta p,$$

где $\alpha=0,8$ – коэффициент релаксации.

Дискретные уравнения (6) и (11) решались методом прогонки [12]. Расчеты проводились на равномерной сетке при $H_0=D$; $d/D=0,3$; $d_s/D=0,05$; $a=d/4$; $b/a=0,8$; $d_0=0,75d$; $H/H_0=0,4$, где H_0 – высота невозмущенной поверхности жидкости над дном аппарата; D – диаметр аппарата; d_s – диаметр вала; d_0 – диаметр диска; a – длина лопатки. Результаты расчетов представлены на рис. 2 и 3 в виде линий тока $\psi=\text{const}$, где ψ – функция тока.

Мешалка создает потоки жидкости, которые вызывают циркуляцию во всем объеме аппарата. Окружная циркуляция, называемая первичной, связана с вращением массы жидкости вокруг оси вращения мешалки. Существенную роль в перемешивании играет вторичная циркуляция, которая связана с насосным действием мешалки. Линии тока в меридиональной плоскости аппарата характеризуют вторичное циркуляционное течение, которое накладывается на основное окружное течение. Перемешиванию способствуют два потока радиально-осевой циркуляции соответственно сверху и снизу от мешалки. Во время движения на частицы жидкости действует ускорение, вызванное вращением мешалки. Величина этого ускорения определяется центробежными силами. Когда центробежные силы малы, то это движение приводит к незначительному понижению уровня жидкости у вала мешалки (рис. 2).

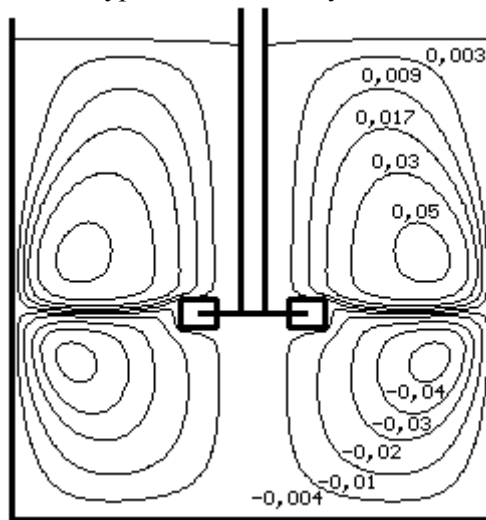


Рис. 2. Радиально-осевая циркуляция в аппарате при $Re=100$, $Fr=0,05$

Увеличение чисел Рейнольдса и Фруда связано с ростом центробежных сил, что находит отражение в усилении радиально-тангенциальной конвекции. Соответственно возрастает и интенсивность радиально-осевой циркуляции жидкости. В свою очередь, это приводит к углублению образовавшейся центральной воронки, характерной для аппаратов с мешалками (рис. 3).

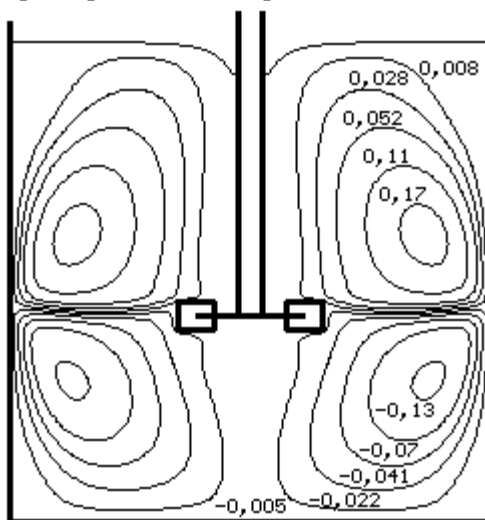


Рис. 3. Радиально-осевая циркуляция в аппарате при $Re=800$, $Fr=0,25$

Путем подбора в расчетных формулах можно определять предельную частоту вращения мешалки, при которой поверхность жидкости достигает ступицы мешалки. Предлагаемая методика расчета формы воронки может быть использована также и при моделировании турбулентных течений в аппаратах с мешалками.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Васильцов Э.А., Ушаков В.Г. Аппараты для перемешивания жидких сред. – Л.: Машиностроение, 1979. – 272 с.
2. Стренк Ф. Перемешивание и аппараты с мешалками. – Л.: Химия, 1975. – 384 с.
3. Гзовский С.Я. Исследование кинематики потока при перемешивании жидкости радиально-лопастными мешалками // Химическое машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 13-20.
4. Гзовский С.Я. Исследование гидродинамики потока при перемешивании жидкостей радиально-лопастными мешалками // Химическое машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 17-20.
5. Брагинский Л.Н. О распределении окружных скоростей жидкости и глубине воронки в аппаратах с мешалками // Теоретические основы химической технологии. – 1967. – Т. 1. – № 5. – С. 675-681
6. Zlokarnik M. *Stirring: Theory and Practice*. – Weinheim: Wiley-VCH, 2001. – 362 p.
7. Turbulent flow in closed and free surface unbaffled tanks stirred by radial impellers / M. Ciofalo, A. Brucato, F. Grisafi, N. Torraça // *Chemical Engineering Science*. – 1996. – Vol. 51. – P. 3557-3573.
8. Modeling turbulent flows with free surface in unbaffled agitated vessels / J.N. Haque, T. Mahmud, K.J. Roberts, D. Rhodes // *Industrial and Engineering Chemistry Research*. – 2006. – Vol. 45. – P. 2881-2891.
9. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. – М.: Физматлит, 2003. – 732 с.
12. Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости*. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

13. *Harlow F.H., Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Physics of Fluids*. – 1965. – Vol. 8. – P. 2182-2189.
14. *Газизуллин Н.А.* К расчету формы свободной поверхности жидкости в аппарате с перемешивающим устройством // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева*. – 2012. – № 1. – С. 89-95.
15. *Холл Д., Уамм Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

Статья поступила в редакцию 28 марта 2014 г.

VISCOUS FLUID MIXING WITH A FREE SURFACE IN A TANK WITH A RUSHTON TURBINE

N.A. Gazizullin

Kazan National Research Technological University
68, Karl Marx st., Kazan, 420015, Russian Federation

Numerical simulation of the flow field in a tank with a Rushton turbine is carried out by the control volume method. The profile of the free surface in the tank is computed as a part of the solution by means of an iterative technique. The results are presented as streamline contours of the secondary circulation .

Keywords: *fluid mixing, Rushton turbine, control volume method, free surface, fluid circulation, streamline contours.*

УДК 536. 2 (075)

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ*

А.Э. Кузнецова, М.П. Скворцова, Е.В. Стефанюк

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

С использованием аналитического решения прямой задачи нестационарной теплопроводности, а также значений величин искомой функции, полученных численным методом, выполнена идентификация начального условия краевой задачи. Аппроксимация полученной из численного решения температуры в одной из точек пространственной переменной выполнялась кубической параболой в некотором диапазоне времени нерегулярного режима. После подстановки аппроксимационной функции в аналитическое решение и интегрирования полученного выражения в диапазоне времени аппроксимации относительно величины начального условия было получено алгебраическое линейное уравнение, из решения которого следует, что точность идентификации составляет 0,018 %.

Ключевые слова: *задача теплопроводности, аналитическое решение, прямая задача, обратная задача, аппроксимация, идентификация, начальное условие.*

В математическом моделировании разделение краевых задач на прямые и обратные основывается на анализе причинно-следственных связей в исследуемой прикладной математической модели. Причинными характеристиками являются: граничные условия и их параметры; коэффициенты, характеризующие физические свойства среды; начальные условия, определяющие значения искомых функций в начальный момент времени; геометрические характеристики, определяющие границы изменения независимых переменных задачи. К следственным характеристикам относятся поля, определяемых при решении задачи величин (температуры, напряжения, скорости движения сред и проч.). При этом следует отметить, что причинные характеристики, задаваемые произвольно, не зависят от следственных. Однако изменение причинных характеристик приводит к соответствующему изменению следственных величин. Определение этой причинно-следственной зависимости представляет решение прямой задачи, в которой по известным (заданным) причинным характеристикам находятся следственные составляющие процесса. В случае, когда по известным

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВПО «СамГТУ» (код проекта: 1273).

Анастасия Эдуардовна Кузнецова, аспирант.

Марина Петровна Скворцова, аспирант.

Екатерина Васильевна Стефанюк (д.т.н.), доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханики».

характеристикам требуется идентифицировать (восстановить) отдельные причинные составляющие процесса, будем иметь обратную краевую задачу.

Если имеется точное аналитическое решение прямой задачи и из эксперимента получены точные значения искомой функции, то можно получить точное решение обратной задачи теплопроводности. Однако ввиду того, что практически из любого эксперимента могут быть получены лишь приближенные значения искомой функции, решение обратной задачи будет приближенным. Причем точность этого решения будет определяться лишь точностью экспериментального исследования.

Обратные задачи подразделяются на ретроспективные, граничные, коэффициентные и геометрические. Ниже будут представлены результаты решения ретроспективной обратной задачи, или задачи с обратным временем, в которой восстанавливается временная предыстория физического процесса. К числу таких задач относится задача по идентификации начального условия краевой задачи [1, 2]. Рассмотрим последовательность восстановления начального условия на примере решения следующей прямой задачи теплопроводности [3, 4]:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (2)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi - Bi_1 [\Theta(0, Fo) + D] = 0; \quad (3)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi + Bi_2 [\Theta(1, Fo) - 1] = 0, \quad (4)$$

где $\Theta(\xi, Fo) = [T(\xi, Fo) - T_0] / (T_2 - T_0)$ – относительная избыточная температура; $D = (T_0 - T_1) / (T_2 - T_0)$;

$\xi = x / \delta$ – безразмерная координата;

δ – толщина пластины;

$Fo = a\tau / \delta^2$ – число Фурье;

a – коэффициент температуропроводности;

τ – время;

$Bi_1 = \alpha_1 \delta / \lambda'$, $Bi_2 = \alpha_2 \delta / \lambda'$ – числа Био;

α_1 , α_2 – коэффициенты теплоотдачи;

λ' – коэффициент теплопроводности;

T_1 , T_2 – температуры сред;

T_0 – начальная температура.

Решение задачи (1) – (4) представим в виде суммы двух функций

$$\Theta(\xi, Fo) = \Theta_c(\xi) + \Theta_n(\xi, Fo), \quad (5)$$

где $\Theta_c(\xi)$ – решение стационарной задачи при неоднородных граничных условиях вида (3), (4). Оно принимается в виде

$$\Theta_c(\xi) = F_1 + F_2 \xi,$$

где F_1 , F_2 – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (3), (4). Формулы для них будут (полагая, что $T_1 = T_0$ и $D = 0$)

$$F_1 = \frac{Bi_2}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2}; F_2 = F_1 Bi_1. \quad (6)$$

Функция $\Theta_H(\xi, Fo)$ является решением нестационарной задачи теплопроводности при однородных граничных условиях. Математическая постановка задачи для нее имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_H(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta_H(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (7)$$

$$\Theta_H(\xi, 0) = -\Theta_c(\xi); \quad (8)$$

$$\partial \Theta_i(0, Fo) / \partial \xi - Bi_1 \bar{\Theta}_i(0, Fo) = 0; \quad (9)$$

$$\partial \Theta_i(1, Fo) / \partial \xi + Bi_2 \bar{\Theta}_i(1, Fo) = 0. \quad (10)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (7) – (10) принимаем в виде

$$\Theta_i(\xi, Fo) = \varphi(Fo)\psi(\xi), \quad (11)$$

где $\varphi(Fo)$ – неизвестная функция времени; $\psi(\xi)$ – неизвестная функция пространственной переменной.

Подставляя (11) в (7), находим

$$d\varphi(Fo) / dFo + v\varphi(Fo) = 0; \quad (12)$$

$$d^2\psi(\xi) / d\xi^2 + v\psi(\xi) = 0. \quad (13)$$

где v – коэффициент.

Решение уравнения (12) известно и имеет вид

$$\varphi(Fo) = A \exp(-vFo). \quad (14)$$

Подставляя (11) в (9), (10), находим граничные условия для функции $\psi(\xi)$:

$$d\psi(0) / d\xi - Bi_1\psi(0) = 0; \quad (15)$$

$$d\psi(1) / d\xi + Bi_2\psi(1) = 0. \quad (16)$$

Решение краевой задачи Штурма – Лиувилля (13), (15), (16) принимается в виде

$$\psi(\xi) = \sum_{k=0}^m b_k \xi^k, \quad (17)$$

где b_k – неизвестные коэффициенты, определяемые из основных и дополнительных граничных условий ($b_0 = 1$); ξ^k ($k = \overline{0, m}$) – координатные функции.

Если ограничиться, например, десятью членами ряда (17), то будем иметь девять неизвестных коэффициентов b_k ($b_0 = 1$), а граничных условий для их определения только два – (15) и (16). В связи с этим необходимо добавить еще семь дополнительных граничных условий, которые находятся из уравнения (13) путем выполнения самого этого уравнения, а также производных от него различного порядка, в граничной точке $\xi = 0$. Такие дополнительные граничные условия в данном случае имеют вид

$$d^2\psi(0) / d\xi^2 + v\psi(0) = 0; \quad (18)$$

$$d^i \psi(0) / d\xi^i + v d\psi^{i-2}(0) / d\xi^{i-2} = 0. \quad (i=3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

Подставляя (17) в основные (15), (16) и дополнительные (18) граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов b_k ($k=0,9$) будем иметь следующую цепочную систему девяти алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{aligned} b_1 - \text{Bi}_1 b_0 = 0; \quad 2b_2 + vb_0 = 0; \quad 6b_3 + vb_1 = 0; \quad 12b_4 + vb_2 = 0; \quad 20b_5 + vb_3 = 0; \\ 30b_6 + vb_4 = 0; \quad 42b_7 + vb_5 = 0; \quad 56b_8 + vb_6 = 0; \\ b_0 \text{Bi}_2 + b_1(1 + \text{Bi}_2) + b_2(2 + \text{Bi}_2) + b_3(3 + \text{Bi}_2) + b_4(4 + \text{Bi}_2) + b_5(5 + \text{Bi}_2) + \\ + b_6(6 + \text{Bi}_2) + b_7(7 + \text{Bi}_2) + b_8(8 + \text{Bi}_2) + b_9(9 + \text{Bi}_2) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При известной величине $b_0 = 1$ все остальные неизвестные коэффициенты b_i ($i=\overline{1,9}$) системы (19) легко находятся из решения лишь одного уравнения (соответствующего данному коэффициенту) с одним неизвестным. Найденные таким путем коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} b_1 = \text{Bi}_1; \quad b_2 = -v/2; \quad b_3 = -v\text{Bi}_1/6; \quad b_4 = v^2/24; \\ b_5 = v^2\text{Bi}_1/120; \quad b_6 = -v^3/720; \quad b_7 = v^3\text{Bi}_1/5040; \quad b_8 = v^4/40320; \\ b_9 = -1 + 9v/22 - 17v^2/440 + 83v^3/55440 - v^4/44352. \end{aligned}$$

Коэффициент b_9 найден из условия $\text{Bi}_1 = 3; \text{Bi}_2 = 2$.

Таким образом, в данном случае ввиду цепочности системы алгебраических уравнений (19) проблемы, связанной с плохой обусловленностью матрицы коэффициентов этой системы, не возникает.

Для определения собственных чисел составим интеграл взвешенной невязки уравнения (13)

$$\int_0^1 [d^2 \psi(\xi) / d\xi^2 + v\psi(\xi)] d\xi = 0. \quad (20)$$

Подставляя (17) в (20), относительно v_k с учетом найденных значений коэффициентов b_k получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$\frac{v^5}{1995840} - \frac{283v^4}{2217600} + \frac{37v^3}{3850} - \frac{27v^2}{88} + \frac{197v}{55} = 0. \quad (21)$$

Первые два корня уравнения (21) имеют вид: $v_1 = 3,404278$ $v_2 = 17,593928$. Ввиду того, что уравнение (13) удовлетворяется лишь при некоторых дискретных значениях v_k (собственных значениях), остальные корни этого уравнения отбрасываются как не удовлетворяющие ему.

Для уточнения первых двух собственных чисел составляется невязка уравнения (13) и требуется ортогональность невязки к собственной функции (17):

$$\int_0^1 [d^2 \psi(\xi) / d\xi^2 + v\psi(\xi)] \psi(\xi) d\xi = 0. \quad (22)$$

После определения интегралов в (22) относительно собственных чисел получаем степенное алгебраическое уравнение, корни которого, удовлетворяющие уравнению (13), следующие: $v_1 = 3,404290$ $v_2 = 17,689298$.

Сравнивая собственные числа с их точными значениями (см. таблицу), можно заметить, что требование ортогональности уравнения (13) к собственной функции (17) позволяет существенно уточнить их значения. Собственные функции по известным собственным значениям находятся из (17):

$$\psi_n(\xi) = \sum_{k=0}^9 b_k(v_n) \xi^k \quad (n = 1, 2). \quad (23)$$

| Число приближений | Собственные числа | | | | |
|-----------------------|-------------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 |
| 2 | 3,404278 | 17,593927 | | | |
| | 3,404290 | 17,689297 | | | |
| 3 | 3,404290 | 17,683688 | 48,120431 | | |
| | 3,404290 | 17,683680 | 48,586633 | | |
| 4 | 3,404290 | 17,683680 | 48,569379 | 95,497616 | |
| | 3,404290 | 17,683680 | 48,569017 | 98,594028 | |
| 5 | 3,404290 | 17,683680 | 48,569017 | 98,357200 | 166,909671 |
| | 3,404290 | 17,683680 | 48,569017 | 98,357137 | 167,648755 |
| Точные значения v_n | 3,404025 | 17,682025 | 48,566961 | 98,346889 | 167,650704 |

Подставляя (14), (17) в (11), находим частное решение уравнения (12):

$$\Theta_n(\xi, Fo) = A_n \psi_n(\xi) \exp(-v_n Fo). \quad (24)$$

Составляя сумму частных решений, получаем

$$\Theta_n(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^m A_n \psi_n(\xi) \exp(-v_n Fo), \quad (25)$$

где m – число приближений, равное количеству собственных чисел.

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_n составляется невязка начального условия (8) и требуется ортогональность невязки к каждой собственной функции:

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^2 A_n \psi_n(\xi) + F_1 + F_2 \xi \right] \psi_j(\xi) d\xi = 0. \quad (26)$$

Ввиду ортогональности собственных функций получаем следующую формулу для определения коэффициентов A_n ($n = 1, 2$):

$$A_n = \int_0^1 (F_1 + F_2 \xi) \psi_n d\xi / \int_0^1 \psi_n^2(\xi) d\xi. \quad (27)$$

Из формулы (27) находим $A_1 = -0,27528$; $A_2 = 0,13713$. Отметим, что коэффициенты A_1 и A_2 найдены из уточненных значений собственных чисел.

После нахождения решений нестационарной $\Theta_n(\xi, Fo)$ и стационарной $\Theta_c(\xi)$ соотношение (5) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = F_1 + F_2 \xi + \sum_{n=1}^m A_n \psi_n(\xi) \exp(-v_n Fo). \quad (28)$$

На графиках (рис. 1) представлены результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (28) в пятом приближении ($m = 5$). При этом было использовано 30 членов ряда (17). Значения собственных для различного числа приближений в сравнении с их точными значениями [5] представлены в таблице. Здесь даны значения собственных чисел для случаев, когда интегрируется лишь невязка уравнения (13) (верхняя строка каждого приближения) и когда требуется ортогональность невязки к собственной функции ψ_n (нижняя строка).

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что безразмерные температуры, полученные по формуле (28), в пятом приближении для чисел $Fo > 0,001$ практически совпадают с их точными значениями, которые определялись по формуле (24) из [5]. При этом было использовано 30 членов ряда точного решения.

Анализируя изменение невязки уравнения (1) по координате x (рис. 2) ($Fo = 0,02$), можно заметить, что на отрезке $0 \leq x \leq 0,75$ уравнение (1) выполняется точно ($\varepsilon = 0$). Для $x > 0,75$ невязка возрастает, и в точке $x = 1$ она принимает максимальное значение. Изменение невязки уравнения (1) в точке $x = 1$ во времени (рис. 3) показывает, что она уменьшается с увеличением числа Фурье и при $Fo > 0,03$ становится практически равной нулю.

Анализ невязки начального условия (2) показывает, что максимальная ее величина достигается также в точке $x = 1$. Невязка начального условия уменьшается с увеличением числа приближений (рис. 4).

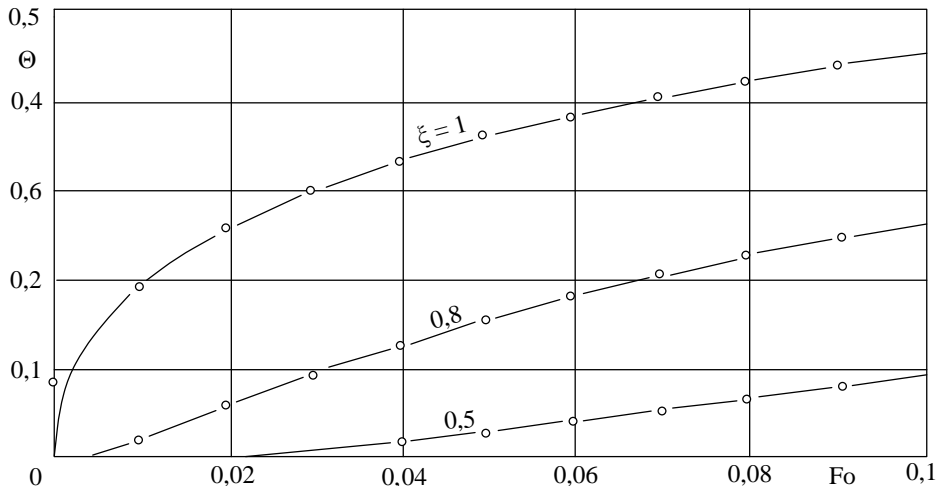


Рис. 1. Распределение безразмерной температуры: — точное решение [5];
 ○ расчет по формуле (28) (пятое приближение, $m = 5$)

Преимущества полученного выше аналитического решения вида (28) заключаются в том, что при использовании экспериментальных (или расчетных) данных по изменению во времени температуры в какой-либо одной точке пластины (например $\xi = 1$) путем решения обратной задачи теплопроводности

могут быть найдены физические характеристики среды, коэффициенты граничных условий, геометрические условия, а также начальные условия краевой задачи. И, в частности, используя численное решение задачи (1)–(4), с помощью соотношения (28) выполним идентификацию начального условия (2) при следующих исходных данных: $\alpha_1 = 10$ Вт/(м² / К); $\alpha_2 = 20$ Вт/(м² / К); $\delta = 0,06$ м; $\lambda' = 45$ Вт/(м / К); $a = 10^{-6}$ м² / с; $T_0 = T_1 = 100^\circ\text{C}$; $T_2 = 20^\circ\text{C}$.

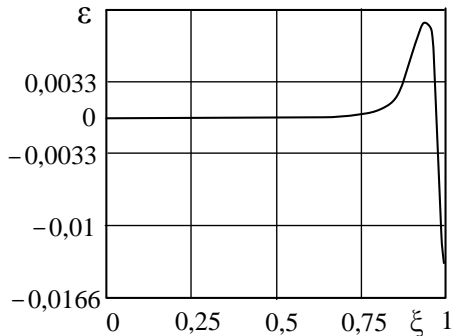


Рис. 2. Невязка ε уравнения (1) при $m = 5$ (пять приближений) ($Fo = 2,02, \xi = 1$)

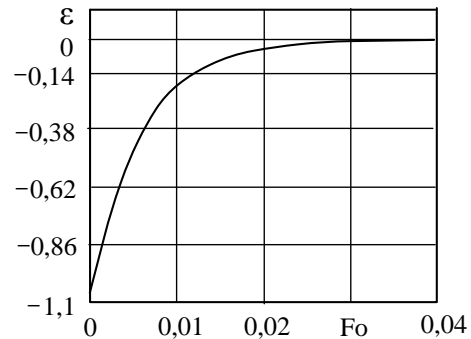


Рис. 3. Изменение невязки ε уравнения (1) во времени при $m = 5$ ($\xi = 1$)

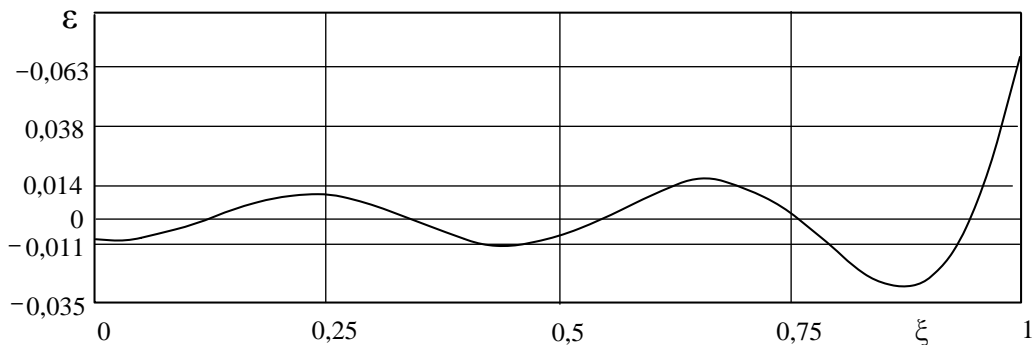


Рис. 4. Невязка ε начального условия при $m = 5$ (пять приближений) ($Fo = 0$)

Значения температуры в точке $\xi = 1$ ($x = 0,006$ м), полученные из решения данной задачи численным методом, в диапазоне времени $72 \text{ с} \leq \tau \leq 288 \text{ с}$ аппроксимируем следующей функцией:

$$T(0,006; \tau) = \sum_{i=0}^3 a_i \tau^i, \quad (29)$$

где a_i ($i = \overline{0,3}$) – неизвестные коэффициенты.

Записывая соотношение (29) для четырех значений температур ($T_1 = 71,23$ °С; $T_2 = 74,14$ °С; $T_3 = 77,5$ °С; $T_4 = 82$ °С), наблюдающихся в точке $x = 0,006$ м соответственно в моменты времени $\tau_1 = 72$ с; $\tau_2 = 144$ с; $\tau_3 = 216$ с; $\tau_4 = 288$ с, относительно неизвестных коэффициентов a_i ($i = \overline{0,3}$) будем иметь систему четырех алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим $a_1 = 88,3$; $a_2 = -0,103819$; $a_3 = 0,000243$; $a_4 = -3,081061$. Проверка результатов аппроксимации позволяет заключить, что значения температур,

получаемых по формуле (29), во всем диапазоне времени $72 \text{ с} \leq \tau \leq 288 \text{ с}$ практически совпадают с численным решением.

Запишем формулу (28) в размерном виде:

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_2 - T_0) \left[F_1 + F_2 \frac{x}{\delta} + \sum_{n=1}^5 A_n \sum_{k=0}^9 b_k (v_n) \left(\frac{x}{\delta} \right)^k \exp\left(-v_n \frac{a\tau}{\delta^2}\right) \right]. \quad (30)$$

Подставляя (29) с учетом найденных значений коэффициентов a_i ($i = \overline{0,3}$) в левую часть соотношения (30), относительно искомого начального условия T_0 будем иметь алгебраическое линейное уравнение $151,21581 T_0 - 15124,366359 = 0$, из решения которого находим $T_0 = 100,01841$. Таким образом, погрешность определения начального условия из решения обратной задачи теплопроводности составляет 0,018 %.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 297 с.
2. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
3. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Назаренко С.А., Стефанюк Е.В. Метод координатных функций в несимметричных задачах теплопроводности // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Математическая. – Вып. 22. Дифференциальные уравнения и их приложения. № 2. – 2003. – С. 136–141.
4. Кудинов В.А. Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2004. – № 3. – С. 82–100.
5. Григорьев Б.А., Маньковский О.Н. Инженерные задачи нестационарного теплообмена. – Л.: Энергия, 1968. – 84 с.

Статья поступила в редакцию 5 января 2014 г.

THE INVERSE PROBLEM SOLUTION OF HEAT CONDUCTION FOR THE INITIAL CONDITIONS IDENTIFICATION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM

A.E. Kuznetsova, M.P. Skvortsova, E.V. Stefanyk

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Analytical solution of the direct problem of nonstationary heat conduction, as well as the values of the unknown function obtained by the numerical method is used. Identification of the initial conditions of the boundary value problem is made. The approximation obtained from the numerical solution temperature at one point in the spatial variable was performed by the cubic parabola in a certain irregular time range. After substitution of approximation function in the analytical solution and integrating the obtained expression in the time range of approximation relative to the value of the initial conditions the transcendental equation was obtained. The result is the iteration method. The identification accuracy is 0,018%.

Keywords: *the heat conduction problem, analytical solution of the direct problem, inverse problem, approximation, identification.*

*Anastasiya E. Kuznetsova, Postgraduate Student.
Marina P. Skvortsova, Postgraduate Student.
Ekaterina V. Stefanyk (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*