

Энергетика

УДК 681.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В УСЛОВИЯХ ДЕКОМПОЗИЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Т.А. Бенгина

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Предлагается новый подход к задаче оптимального управления процессом газового азотирования по критерию максимальной производительности установки в условиях заданного качества азотирования при выполнении технологических ограничений. В отличие от известных постановок аналогичных задач проведена декомпозиция математической модели процесса на две краевые задачи оптимального управления процессом массопереноса и теплопроводности с подвижным правым концом траектории в негладкой бесконечномерной области пространства состояний. В качестве метода решения параметризованной оптимальной задачи принят альтернативный метод оптимизации.

Ключевые слова: газовое азотирование, теплоперенос, оптимальное управление, декомпозиция модели, минимаксная оценка отклонения, альтернативный метод оптимизации.

Для увеличения ресурса работы деталей с трущейся поверхностью широко используется химико-термическая обработка. Одним из видов такой обработки является диффузионное насыщение поверхностного слоя стали азотом (азотирование), которое значительно повышает твердость, износостойкость и коррозионную стойкость поверхностного слоя изделия.

Однако проблема автоматического управления подобным процессом тепло-массопереноса к настоящему времени не может считаться решенной. Причина заключается в сложном и многостороннем характере связей – эксплуатационных характеристик: твердости и износостойкости азотированных деталей с управляющими воздействиями – параметрами технологического процесса. Осложняет ситуацию многофазный состав поверхностного упроченного слоя, что резко затрудняет задачу построения адекватной математической модели, пригодной для использования при решении задач оптимального управления технологией азотирования.

В условиях существенно малой глубины азотированного слоя по сравнению с толщиной детали математическое описание диффузии азота в каждой i -ой фазе, принимает форму дифференциального уравнения диффузии для бесконечной пластины толщиной $2R$:

Татьяна Алексеевна Бенгина (к.т.н.), доцент кафедры «Высшая математика и прикладная информатика».

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i(C) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где $\tau > 0$, $0 < x < R$, $D_i(C)$ – коэффициент диффузии азота в i -ой фазе;

$C(x, \tau)$ – концентрация азота в точке x , в момент времени τ .

Начальное распределение концентрации диффундирующего элемента в слое $C_0(x)$ и положение межфазных границ $\xi_{i0}(x)$ может быть произвольным.

$$C(x, 0) = C_0(x); \quad (2)$$

$$\xi_i(x, \tau)|_{\tau=0} = \xi_{i0}(x). \quad (3)$$

Физику переноса азота из атмосферы на поверхность детали наиболее адекватно отражают граничные условия третьего рода:

$$-D_i \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R} = \beta_i (\Pi_N^0 - \Pi_N^i), \quad (4)$$

где β_i – коэффициент массопереноса для i -ой фазы;

$$\Pi_N^0 = \frac{P_{NH_3}}{P_{H_2}} \text{ – азотный потенциал печной атмосферы;}$$

P_{NH_3}, P_{H_2} – парциальные давления аммиака и водорода соответственно;

Π_N^i – равновесный азотный потенциал соответствующей фазы.

Граничное условие на левой границе имеет вид условия симметрии:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (5)$$

Условия на границах раздела фаз

$$C(x_i, \tau)|_{x_i=\xi_{i-0}} = C_i^-; \quad (6)$$

$$C(x_i, \tau)|_{x_i=\xi_{i+0}} = C_i^+.$$

Закон движения границы, разделяющей две различные фазы, выражающий собой условие баланса вещества при фазовых переходах, имеет вид:

$$j_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \tau} = D_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{\xi_{i+0}} - D_{i-1} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-0}}, \quad (7)$$

где $j_i = C_i^- - C_i^+$, $i = \overline{1, N}$, N – общее число областей, разделенных фазовыми переходами [4,5,6].

Конструктивные математические модели тепломассопереноса в качестве существенной компоненты содержат модель нагрева детали.

Температура азотируемой детали оказывает существенное влияние на твердость азотированного слоя, размеры и его фазовый состав. Процесс нагрева и термообработки определяет размеры зерна, скорость роста и распределение нитридов, определяет скорость диффузии атомов азота в каждой фазе.

Процесс нагрева детали описывается линейным одномерным уравнением теплопроводности Фурье, относящимся к классу уравнений математической физики параболического типа для распределения относительной температуры

$\theta(l, \tau) = \frac{T(x, \tau) - T^*}{q_{\max} R^2}$ по относительной глубине $l = \frac{x}{R}$, в предположении равно-

мерного относительного потока $\tilde{q} = \frac{q(\tau)}{q_{\max}}$ тепла по её поверхности.

$$\frac{\partial \theta(l, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial l^2} + \frac{\Pi}{l} \frac{\partial \theta}{\partial l} = 0, \quad \forall l \in [0, 1], \forall \tau \in (0, \infty]; \quad (8)$$

$$\theta(l, \varphi)|_{\varphi=0} = v, \quad \forall l \in [0, 1]; \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(l, \varphi)}{\partial l} \right|_{l=0} = 0, \quad \forall \tau \in [0, \infty]; \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(l, \varphi)}{\partial l} \right|_{l=1} = \tilde{q}(\varphi), \quad \forall \tau \in [0, \infty]. \quad (11)$$

Здесь $\varphi = \frac{a\tau}{R^2}$ – относительное время;

a – коэффициент температуропроводности материала азотируемой детали [1, 7, 8].

При этом без большой погрешности форму детали можно считать канонической – бесконечным цилиндром ($\Pi=1$) с радиусом R или бесконечной пластиной ($\Pi=0$) толщиной $2R$.

При анализе рассматриваемого технологического процесса азотирования, очевидно, что величина абсолютного отклонения распределения азота от требуемого непосредственно влияет на эксплуатационные свойства изделия. Технология азотирования не допускает повышения абсолютной величины отклонений от заданного состояния. Допустимая абсолютная погрешность распределения азота по глубине составляет $\pm 10 \div 15\%$. Поэтому в качестве критерия точности или ограничений в задаче быстрогодействия в работе используется минимаксная оценка отклонения [1].

Таким образом, технологически обоснованная исходная постановка векторной задачи оптимального управления процессом газового азотирования имеет следующий вид.

Для объекта в форме (1)-(7); (8)-(11) определить вектор-функцию управления

$$v(\varphi) = \left[\left(\Pi_N^0(\tau) \right), \tilde{q}(\varphi) \right]^T, \quad (12)$$

переводящую объект (1)-(7); (8)-(11) из определенного начального состояния (2), (3), (9) в допустимую конечную область

$$\Omega_{c\theta} = \Omega_c \cup \Omega_\theta = \left\{ C(x, \varphi) : \max \left| C(x, \varphi) \Big|_{\varphi=\varphi^0} - C^*(x) \right| \leq \varepsilon_N^{3ad}; \right. \\ \left. T(l, \varphi) : \max \left| T(l, \varphi) \Big|_{\varphi=\varphi^0} - T^* \right| \leq \varepsilon_T^{3ad} \right\} \quad (13)$$

при заданном уровне отклонений ε_N^{3ad} и ε_T^{3ad} конечного состояния $C(x, \tau^0), T(x, \tau^0)$ от требуемого профиля $C^*(x)$ и требуемой постоянной температуры азотирования $T^* = const$ за минимальное время τ^0 в условиях выполнения ограничений

$$C_{\min}^i(x, \tau) \leq C^i(x, \tau) \leq C_{\max}^i(x, \tau), i = \alpha, \beta, \gamma ; \quad (14)$$

$$\Pi_{\min} \leq \Pi_N^0(\tau) \leq \Pi_{\max}; \quad (15)$$

$$\tilde{q}_{\min} \leq \tilde{q}(\varphi) \leq \tilde{q}_{\max} = 1. \quad (16)$$

Строгое решение поставленной векторной задачи затруднительно, однако реальная промышленная технология азотирования позволяет произвести упрощающую решение редукцию этой задачи. В качестве идеи модификации задачи, к виду, поддающемуся аналитическому решению, рассматривается возможность имитации условий Стефана. При этом используются фиктивные источники q_1, q_2 , распределенные для каждой из фаз от подвижной границы на область, лежащую вне существования соответствующей фазы, с одновременным дополнением пространственной области существования каждой из фаз до полупространства $[0, \infty]$ [1,8]. В линеаризованной форме краевой задачи Стефана (1)-(7) при условии $D_i(C) = D_i$ независимости коэффициента диффузии в каждой фазе от концентрации в ней азота, можно записать формальные решения следующих эквивалентных ей линейных задач при произвольных зависимостях $\xi(t), q_1(x, t), q_2(x, t), \psi(x)$ и $\varphi_2(t)$:

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + q_1(x, \tau) H[(x - \xi(\tau))]; \tau > 0; 0 < x < \infty; \quad (17)$$

$$\hat{\Gamma}_1 C_1 \Big|_{x=0} = \varphi_1(\tau); \quad (18)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad (19)$$

$$C_1 \Big|_{\tau=0} = \psi_1(x); \quad (20)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial \tau} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + q_2(x, \tau)(H(x) - H[(x - \xi(\tau))]); \tau > 0; 0 < x < \infty; \quad (21)$$

$$\hat{\Gamma}_2 C_2 \Big|_{x=0} = \varphi_2(\tau); \quad (22)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad (23)$$

$$C_2 \Big|_{\tau=0} = \psi_2(x); \quad (24)$$

$$j_i \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi(\tau)+0} - D_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi(\tau)-0}; \quad (25)$$

$$\xi(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0; \quad (26)$$

$$C_1 \Big|_{x=\xi(\tau)} = 0; \quad (27)$$

$$C_2 \Big|_{x=\xi(\tau)} = 0. \quad (28)$$

Здесь $\hat{\Gamma}_2 \Big|_{x=0}$ – линейный дифференциальный оператор;

$\psi_1(x), \varphi_2(\tau)$ – произвольные достаточно гладкие функции;

$q_1(x, \tau), q_2(x, \tau)$ – функции, имитирующие влияние границы раздела фаз, на которые накладываются определяющие условия (25)-(28).

Индекс «1» относится к новой фазе, существующей при $0 < x < \xi(t)$, индекс «2» - к старой фазе, существующей при $x > \xi(t)$ [1,7,8].

Предложенный метод позволяет получить решение линеаризованной проблемы Стефана и эффективно использовать полученное решение в оптимизационных процедурах. Результаты контрольных расчетов, представленные на рисунке, подтвердили адекватность модели экспериментальным данным.

Линеаризация системы (1)-(7) и адекватное приведение её к форме (17)-(28) позволяет произвести одностороннее и двухстороннее преобразование Фурье по пространственным координатам $x(l)$ в краевых задачах (8)-(11) и (17)-(28).

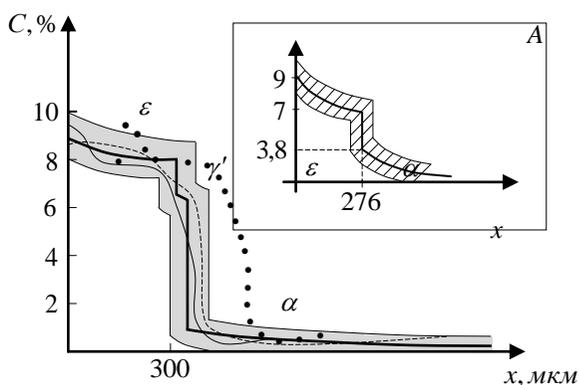
Для уравнений (17) и (21) с краевыми условиями (18)-(20) и (22)-(24) в полубесконечной области в трансформантах Фурье $Z_i^c C(x, \tau)$ получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dZ_i^c(jw)}{d\tau} + w^2 Z_i^c(jw) - \bar{q}_{ji}(\tau) - \beta_{ji} \Pi_N^0(\tau), \quad i = \overline{0, \infty}, \quad j = \alpha, \beta, \gamma. \quad (29)$$

Краевая задача (8)-(11) в трансформантах Фурье $Z_i^T \theta(l, \varphi)$ примет вид бесконечной системы

$$\frac{dZ_i^T}{d\varphi} + \mu_i^2 Z_i^T + \bar{q}_i(\varphi) = 0, \quad (30)$$

$$\mu_i = \arg(\sin \mu_i = 0), \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (31)$$



- Заданный профиль распределения
- Экспериментальный профиль распределения
- ▬ Допустимая погрешность
- — $\varepsilon_n^{зад}$ Численная модель

Распределение азота для технического железа,
A – требуемое распределение для стали 38X2MЮА

Для системы уравнений (29), (30) процедура принципа максимума Потрягина в поставленной задаче быстродействия позволяет утверждать, что компонен-

ты оптимальной вектор-функции $\Pi_N^0(\tau)$ и $\tilde{q}(\varphi)$ имеют характер релейных функций, попеременно принимающих свои граничные значения согласно (15), (16) [2,3,9].

Таким образом, с учетом взаимно-однозначного соответствия объектов (17)-(28) и (29); (8)-(11) и (30) задача параметризуется и сводится к определению продолжительности (Δ_{C_j}) и (Δ_{T_i}) и количества $j=1,2,\dots,J$, $i=1,2,\dots,I$ интервалов постоянства оптимального управления $\Pi_{N_{onm}}^0(\tau) = \Pi_{N_{onm}}^0(\Delta_{C_j})$ и $\tilde{q}_{onm}(\varphi) = \tilde{q}_{onm}(\Delta_{T_j})$.

В условиях постоянства коэффициентов краевой задачи (17)-(28), в узком диапазоне температур, допустимых в ходе азотирования, задачи управления объектами (8)-(11) и (17)-(28) могут решаться автономно.

В качестве метода решения параметризованной оптимальной задачи принят альтернативный метод оптимизации (АМО) [9,10]. При этом определяются не только количество i и j и длительности интервалов постоянства оптимального управления, но и предельно допустимые в каждом i -м и j -м подмножестве управлений отклонения

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{N_{\min}}^{(j)} = \max_x |C(x, \tau^{(j)}) - C^*(x)| \quad (32)$$

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{T_{\min}}^{(i)} = \max_l |T(l, \varphi^{(i)}) - T^*|, \quad (33)$$

где $\tau^j = \sum_{n=1}^j \Delta_n^\tau$; $\varphi^i = \sum_{n=1}^i \Delta_n^\varphi$.

Полученные таким образом из решения определяющей системы алгебраических трансцендентных уравнений в процедуре АМО решения задачи максимальной точности $\varepsilon_{N_{\min}}^{(j)}$ и $\varepsilon_{T_{\min}}^{(i)}$ в каждом j -м или i -м классе управлений составляют ряд неравенств:

$$\varepsilon_{N_{\min}}^{(1)} > \varepsilon_{N_{\min}}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{N_{\min}}^{(j)} \dots \geq \varepsilon_{\inf C} = 0. \quad (34)$$

$$\varepsilon_{T_{\min}}^{(1)} > \varepsilon_{T_{\min}}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{T_{\min}}^{(i)} \dots \geq \varepsilon_{\inf T} = 0. \quad (35)$$

Точность, достигаемая согласно (34) в классе одноинтервальных управлений $\varepsilon_{N_{\min}}^{(1)} < \varepsilon_N^{zad}$, позволяет ограничиться одноинтервальным управлением по азотному потенциалу в задаче быстрогодействия, т.е. $\Pi_{N_{onm}}^0(\tau) = \Pi_{N_{onm}}^0(\Delta_{C1})$.

В рассматриваемом примере $\Delta_{C1} = 9$ часов, $\Pi_{N_{\max}} = 2,64$.

Таким образом, необходимо решение задачи быстрогодействия для объекта (8)-(11), причем эта задача должна быть решена и реализована до начала азотирования, т.к. отклонение температуры азотирования от регламентированной отрицательно влияет на характер диффузии азота, величину и плотность распределения нитридов, хрупкость и твердость поверхностного слоя и прочность и износостойкость азотированных деталей при переменных нагрузках.

Предварительный анализ показывает, что допустимое приближенное отклонение ε_T^{zad} температуры от постоянной требуемой $T^* = const$ находится в области

$$\varepsilon_{\min}^{(2)} < \varepsilon_T^{zad} < \varepsilon_{\min}^{(1)}. \quad (36)$$

Поэтому в соответствии с процедурой АМО для решения задачи оптимального по быстродействию нагрева заготовки ограничиваемся двухинтервальным управлением $i=2$, а параметры Δ_{T1} и Δ_{T2} при заданном допустимом отклонении определяются из системы уравнений АМО:

$$\theta(0, \Delta_{T1}, \Delta_{T2}) = -\varepsilon_T^{зад}; \quad \theta(l_{э2}^0, \Delta_{T1}, \Delta_{T2}) = \varepsilon_T^{зад};$$

$$\frac{\partial \theta(l_{э2}, \Delta_{T1}, \Delta_{T2})}{\partial l} = 0.$$

Проведенная декомпозиция модели тепломассопереноса на диффузионную краевую задачу массопереноса и краевую задачу теплопроводности существенно упрощает решение задачи оптимального управления процессом азотирования по критерию максимальной производительности установки в условиях заданного качества азотирования при выполнении технологических ограничений. Предлагаемый алгоритм оптимизации значительно сокращает время процесса азотирования в сравнении с традиционным способом обработки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бенгина Т.А. Оптимизация технологического процесса газового азотирования: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.13.06. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2008. – 25 с.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. Коган Я.Д., Булгач А.А. Моделирование на ЭВМ кинетики диффузионного насыщения при газовом азотировании // МиТОМ. – 1984. – № 1. – С. 10-19.
5. Лахтин Ю.М. Регулирование фазового состава и содержания азота в нитридном слое при азотировании стали 38Х2МЮА // МиТОМ. – 1996. – № 1. – С. 5-11.
6. Лахтин Ю.М., Коган Я.Д., Булгач А.А. Азотирование в машиностроении // Сб. научных трудов МАДИ. – М., 1986. – С. 42-49.
7. Лившиц М.Ю. Оптимизация тепломассообмена при химико-термической обработке изделий // Труды III Минского международного форума по тепломассообмену. Т. 3. – Минск, 1996. – С. 65-70.
8. Лившиц М.Ю. Теория и алгоритмы оптимального управления термодиффузионными процессами технологической теплофизики по системным критериям качества. Дис. ... д-ра техн. наук. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2001. – 425 с.
9. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
10. Рапопорт Э.Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 366 с.
11. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
12. Сыропятов В.Я., Зинченко В.М., Барелко В.В., Быков Л.А. Новые возможности газового азотирования // Наука – производству. – 1998. – № 1. – С. 24-36.
13. Тихонов А.Н. О методах регуляризации задач оптимального управления / ДАН СССР, 1965. – Вып. 162, № 4. – С. 763-766.

Статья поступила в редакцию 25 января 2014 г.

OPTIMUM CONTROL OF HEATMASS TRANSFER PROCESS IN THE CONDITIONS OF DECOMPOSITION OF BASIC MODEL

T.A. Bengina

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

The aim of research is design of technological modes of gas nitriding which provides the improvement of properties of the processed product surface and growth of productivity of the equipment. New approach to a problem of optimum control by heatmass transfer process (gas nitriding) by criterion of the maximum productivity of installation in the conditions of the set quality of nitriding is offered when performing technological restrictions. Unlike known statements of similar tasks decomposition of mathematical model of process on two regional problems of optimum control by mass transfer and heat conductivity process with the mobile right end of a trajectory in rough infinite-dimensional area of space of states is carried out. As a method of the solution of the parametrized optimum task the alternansny method of optimization is accepted.

Keywords: *gas nitriding, heatmass transfer, optimum control, decomposition of model, minimax assessment of a deviation, alternansny method of optimization.*

УДК 536. 54

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ НАСОСОВ С РЕГУЛИРУЕМЫМ И НЕРЕГУЛИРУЕМЫМ ПРИВОДОМ

**С.В. Колесников, В.А. Кудинов, А.Э. Кузнецова, А.Н. Бранфилева,
М.П. Скворцова**

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: totig@yandex.ru

Приведены результаты проведенных на компьютерной модели исследований совместной работы насосов с регулируемым и нерегулируемым числом оборотов приводного двигателя. Построена кривая экономии мощности в зависимости от расхода через насос с регулируемым приводом, работающий в составе группы насосов с нерегулируемыми приводами. Для системы, состоящей из шести параллельно работающих насосов, один из которых – с регулируемым приводом, указан диапазон расходов, в котором наблюдается максимальная экономия мощности. Показано, что для регулирования переменного расхода в сети при постоянном напоре на выходном коллекторе, объединяющим выходные трубопроводы всех параллельно соединенных насосов, достаточно установить регулируемый привод лишь на одном из насосов.

Ключевые слова: компьютерная модель, законы Кирхгофа, характеристики насосов, характеристика гидравлической сети, регулируемый привод, кривая экономии мощности.

Из практики эксплуатации теплосетей известно, что в ряде случаев значительная доля напора, вырабатываемого насосами, гасится на регулирующих задвижках. Такая ситуация обусловлена тем, что рабочее давление на различных тепловыводах, запитываемых от одного коллектора, может быть неодинаковым. К тому же в номенклатуре выпускаемых насосов не всегда оказывается возможным найти насосы с требуемой в каждом конкретном случае подачей. В связи с этим на практике обычно применяют насосы с более высокими характеристиками, чем те, которые требуются. Повышенные на выходе насосов напоры гасятся с помощью соответствующих задвижек. Характеристика насоса в этом случае принимает вид кривой 1' (рис. 1).

При полностью открытой задвижке на выходе насоса пересечение характеристики насоса и сети происходит в точке A_1 . В этом случае при напоре H_1 расход жидкости в сети равен Q_1 . В случаях, когда потребителю требуется напор меньший, чем H_1 , например H_2 , его можно достичь прикрытием задвижки, расположенной на выходе насоса. Характеристика насоса в этом случае принимает вид кривой 1'. По сути это уже не характеристика насоса, а характеристика си-

Сергей Владимирович Колесников (к.т.н.), докторант кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».

Василий Александрович Кудинов (д. ф.-м. н., проф.), заведующий кафедрой «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика».

Анастасия Эдуардовна Кузнецова, аспирант.

Анастасия Николаевна Бранфилева, аспирант.

Марина Петровна Скворцова, аспирант.

стемы, состоящей из насоса и задвижки на его выходе. При такой работе часть энергии, развиваемой насосом, теряется бесполезно на задвижке, то есть насос работает с пониженным КПД. Кроме того, ввиду увеличения наклона характеристики системы «насос – задвижка» уменьшается рабочий диапазон насоса по расходу среды через него. Поэтому такой режим работы насоса, вообще говоря, не рекомендуется нормативными документами.

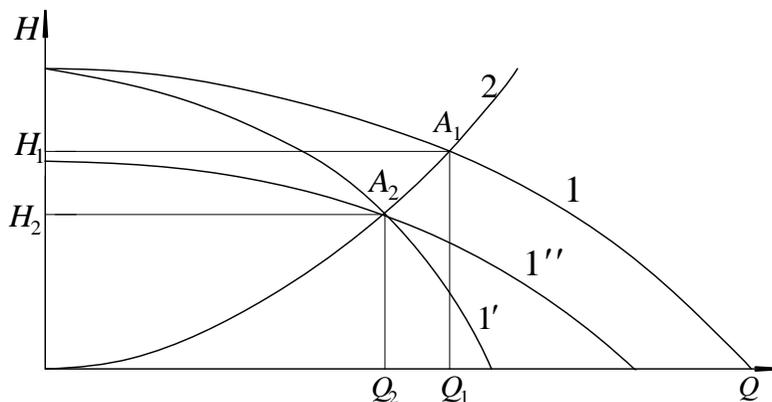


Рис. 1. Характеристика насоса и сети: 1 – характеристика насоса с полностью открытой на его выходе задвижкой; 1' – с частично прикрытой задвижкой; 1'' – с регулируемым по числу оборотов двигателем; 2 – характеристика сети

Другой путь решения этой проблемы – применение насосов с регулируемым по числу оборотов приводом. Характеристика насоса при уменьшении числа оборотов двигателя с целью уменьшения напора до величины H_2 имеет вид кривой 1'' (см. рис. 1), имеющей одинаковый угловой коэффициент с кривой 1. При уменьшении числа оборотов привода для параметров насоса выполняется соотношение [1]

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} = \sqrt[3]{\frac{N_1}{N_2}}, \quad (1)$$

где n_1, n_2 – число оборотов вала насоса до и после изменения;

Q_1, Q_2 – соответствующие расходы через насос;

H_1, H_2 – развиваемые насосом напоры;

N_1, N_2 – потребные мощности.

Таким образом, применение насоса с регулируемым приводом позволяет избежать регулирования напора и расхода задвижкой на выходе насоса. Однако в этом случае возникает ряд проблем, требующих дополнительного исследования. К их числу относятся: совместная работы насоса с регулируемым приводом и параллельно соединенных с ним насосов с нерегулируемым приводом вне зоны их рабочего диапазона расходов и напоров по характеристике, то есть вне зоны, где насосы работают с максимальным КПД; работа насосов при изменяющихся расходах, но при неизменном напоре на их выходе; работа насосов в случае, когда и расход, и давление на выходе переменны.

Для получения общих закономерностей в настоящей работе представлены результаты исследований поставленных выше задач на примере расчета теплосети, состоящей из двух насосов (один с регулируемым приводом) и двух потреби-

телей теплоты (рис. 2), а также теплосети, состоящей из шести параллельно соединенных насосов, один из которых – с регулируемым приводом (теплосеть Самарской ТЭЦ). Исследования выполнялись на компьютерной модели, основанной на двух законах Кирхгофа [1 – 3]. Первый закон применительно к расчету гидравлических систем устанавливает равенство притока и оттока среды в каждом узле сети, то есть требуется выполнение уравнения баланса расходов

$$\sum_i^n Q_i = 0, \quad (2)$$

где n – число узлов сети;

$Q_i (i = \overline{1, n})$ – расходы среды по всем трубопроводам, соединяющимся в данном узле.

Согласно второму закону Кирхгофа сумма напоров для любого замкнутого контура равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{i=1}^n S_i Q_i^2 = 0, \quad (3)$$

где $S_i (i = \overline{1, n})$ – гидравлическое сопротивление i -го участка;

$Q_i (i = \overline{1, n})$ – расходы среды на i -м участке.

Используя уравнения (2) и (3), на основе итеративного метода расчета находятся распределения скоростей, расходов и давлений по всем участкам сети. Регулирование числа оборотов приводного двигателя одного из насосов выполняется по формуле (1).

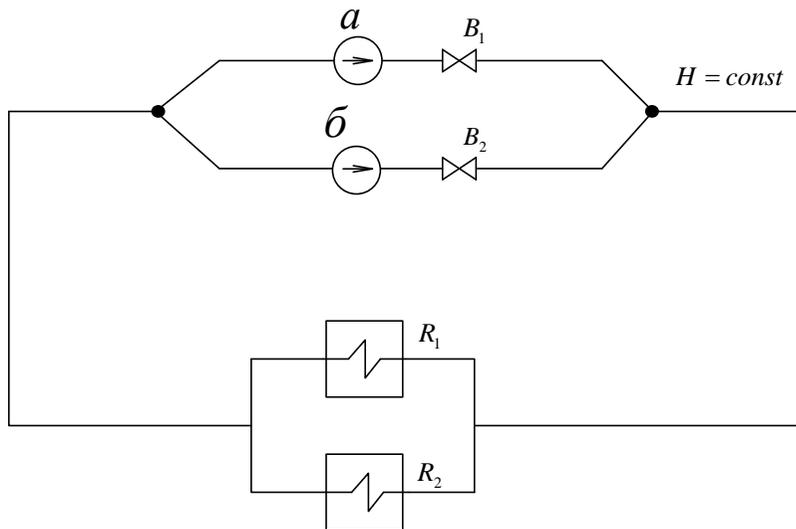


Рис. 2. Схема теплосети с постоянным давлением на тепловывводе:

$a, б$ – насосы; R_1, R_2 – потребители теплоты; B_1, B_2 – задвижки

На графиках рис. 3 даны выполненные на компьютерной модели результаты исследований представленной на рис. 2 гидравлической сети при постоянном напоре $H = const$ на выходе насосов в случае их работы на единую сеть с переменным сопротивлением. Здесь: 1 – характеристика насоса с нерегулируемым приводом, которая также является характеристикой исходного состояния насоса с регулируемым приводом (n_1 – число оборотов в исходном состоянии); 2, 3, 4, 5,

6, 7 – характеристики насоса с регулируемым приводом в зависимости от числа оборотов (n_1, n_2, \dots, n_7); 1+1, 1+2, 1+4, 1+5, 1+6, 1+7 – суммарные характеристики насосов с регулируемым и нерегулируемым приводом при различном числе оборотов насоса с регулируемым приводом; 1', 2', 3', ..., 9' – характеристики внешней сети при различных ее сопротивлениях.

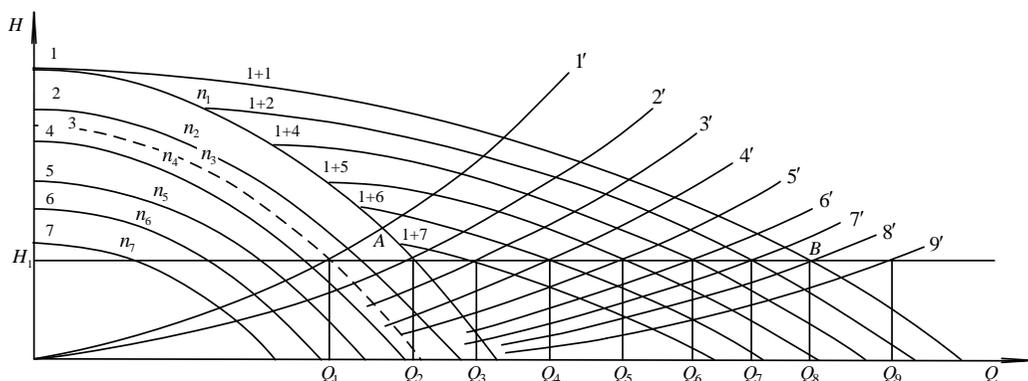


Рис. 3. Совместная работа двух насосов (один с регулируемым приводом) при постоянном напоре на их выходе на единую сеть с переменным сопротивлением

Предположим, что напор H_1 на выходе из насосов поддерживается постоянным вне зависимости от сопротивления внешней сети. Проведем анализ изменения расхода и возможностей его обеспечения с помощью двух параллельно соединенных насосов в зависимости от сопротивления внешней сети. Этот анализ позволяет заключить, что диапазон расходов, которые можно обеспечить с помощью двух насосов при напоре $H_1 = \text{const}$, при различных сопротивлениях внешней сети находится в пределах от Q_2 до Q_8 . При этом расход Q_2 может обеспечить лишь один насос, работающий по характеристике 1 (характеристика сети 2'). Расход Q_8 (при характеристике сети 8') обеспечивается работой двух насосов, причем оба должны иметь характеристики 1. Любые промежуточные (между Q_2 и Q_8) расходы обеспечиваются изменением числа оборотов насоса с регулируемым приводом.

При большом сопротивлении сети (характеристика 1') при данном напоре $H_1 = \text{const}$ расход Q_1 становится настолько мал, что он может быть обеспечен работой одного насоса с регулируемым приводом. Этот насос должен работать по характеристике 3 с числом оборотов n_3 .

При каком-то очень малом сопротивлении сети (характеристика сети 9') расход при данном напоре H_1 становится столь велик, что для его обеспечения недостаточно двух насосов, работающих по характеристике 1. В этом случае необходимо включать дополнительные насосы.

Рассмотрим случай, когда параллельно с изменением напора происходит также изменение расхода на выходе насосов.

На графиках рис. 4, 5 дано распределение расходов при совместной работе двух насосов (из которых насос a – с регулируемым приводом) на общую теплосеть, состоящую из двух тепловыводов 1 и 2. На этих графиках приведены расходы при работе насосов на сеть, имеющую соответственно большое (рис. 4) и малое (рис. 5) гидравлическое сопротивление. Здесь рассмотрен случай, когда число оборотов двигателя насоса a снижается настолько, что его характеристика

принимает вид кривой 1'. Суммарная характеристика насосов *a* и *b* будет иметь вид кривой 1+1', где 1 – характеристика насоса с нерегулируемым приводом, а также насоса с регулируемым приводом в исходном состоянии (до момента начала регулирования насосы имеют одинаковую производительность).

Анализ графиков рис. 4 позволяет заключить, что при достаточно высоком сопротивлении внешней сети с уменьшением числа оборотов насоса *a* (до величины, соответствующей характеристике 1') по сравнению с исходным состоянием (когда насос *a* имел характеристику 1) происходит уменьшение его подачи на величину $Q_2 - Q_1'$. Подача насоса *b* с нерегулируемым приводом, имеющего характеристику 1, при этом увеличивается на величину $Q_2' - Q_2$. Причем уменьшение подачи насоса *Н1* оказывается большим, чем увеличение подачи насоса *b*, на величину $Q_3' - Q_3 = (Q_2 - Q_1') - (Q_2' - Q_2)$. Величина $Q_3' - Q_3$ в данном случае представляет уменьшение подачи двух параллельно работающих насосов во внешнюю сеть при изменении числа оборотов одного из них.

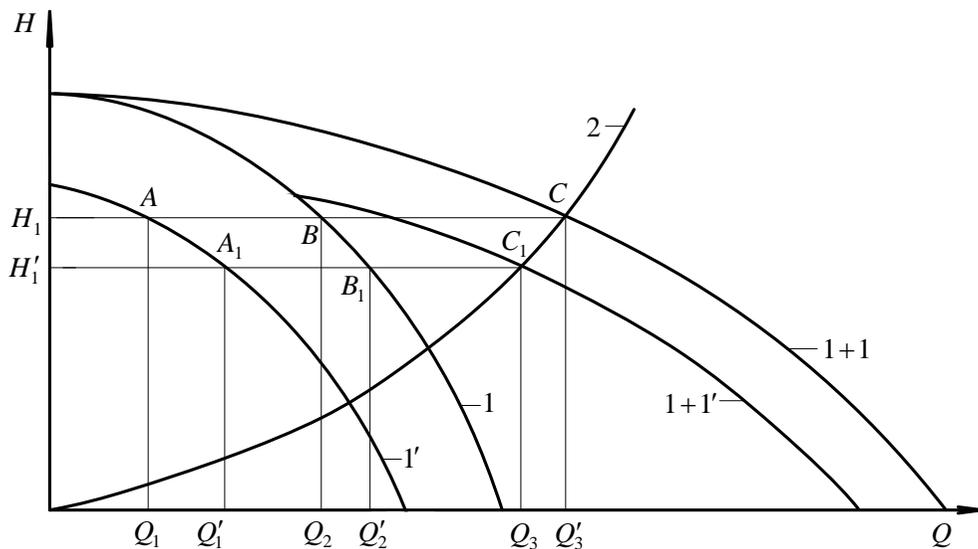


Рис. 4. Совместная работа двух насосов на единую сеть с большим гидравлическим сопротивлением (см. рис. 2):

1 – характеристика насоса с нерегулируемым приводом; 1' – с регулируемым приводом; 2 – характеристика сети; 1+1 – суммарная характеристика двух одинаковых параллельно работающих насосов, имеющих характеристику 1; 1+1' – суммарная характеристика двух параллельно работающих насосов, имеющих характеристики 1 и 1'

На рис. 5 приведены результаты для случая, когда сопротивление внешней сети меньше, чем сопротивление сети, расходные характеристики которой даны на рис. 4. При этом считаем, что число оборотов двигателя насоса *a* уменьшено на ту же самую величину, что и в варианте, приведенном на рис. 4. Анализ результатов позволяет заключить, что суммарная подача в сети при переходе насоса *a* на пониженное число оборотов уменьшилась на величину $Q_3' - Q_3$, которая больше, чем аналогичная величина для варианта сети, характеристики которой приведены на рис. 4.

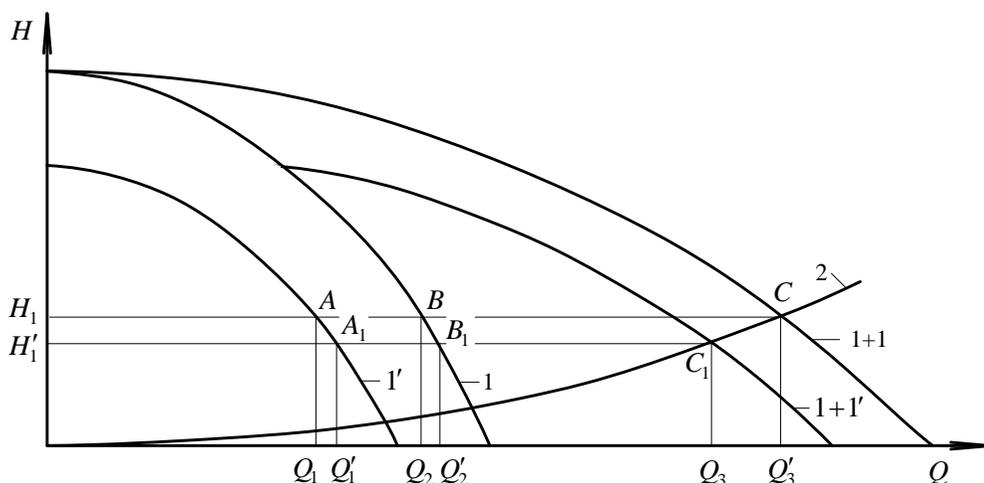


Рис. 5. Совместная работа двух насосов на единую сеть с малым сопротивлением (см. рис. 2)

Изложенные выше результаты позволяют сделать следующие выводы:

- при уменьшении числа оборотов привода насоса *a* одновременно с уменьшением расхода и давления на его выходе происходит возрастание расхода насоса *b* с нерегулируемым приводом. При этом уменьшение расхода насоса *a* оказывается бóльшим, чем увеличение расхода насоса *b*, и, следовательно, суммарный расход в сети уменьшается;

- уменьшение суммарного расхода во внешней сети при одном и том же уменьшении числа оборотов регулируемого привода оказывается тем бóльшим, чем меньше сопротивление сети;

- подача насоса *b* с нерегулируемым приводом при изменении сопротивления внешней сети изменяется. Причем возрастание расхода насоса *b* при уменьшении числа оборотов насоса *a* тем больше, чем выше сопротивление внешней сети. При уменьшении сопротивления внешней сети увеличение подачи насоса *b* становится меньшим (при неизменном числе оборотов насоса *a*), следовательно, роль насоса *b* в регулировании суммарной подачи уменьшается;

- при использовании в системе нескольких параллельно соединенных насосов одного насоса с регулируемым приводом экономия затрачиваемой мощности при уменьшении числа оборотов имеет место только на этом насосе. Расход на всех насосах с нерегулируемым приводом при этом возрастает. Следовательно, рабочая точка на их характеристиках смещается вправо (в сторону бóльших расходов). При этом если она не выходит за пределы рабочей зоны, рекомендуемой паспортными данными этих насосов, то экономичность их работы, по меньшей мере, не снижается. Для получения количественных характеристик необходимо выполнять расчет для каждого отдельного, конкретного случая.

Один насос с регулируемым приводом, установленный в группе параллельно работающих насосов, позволяет выполнять регулирование расхода теплоносителя в сети в диапазоне расхода, развиваемого данным насосом. При этом экономия мощности при использовании насоса с регулируемым приводом по срав-

нению с регулированием задвижкой зависит от величины расхода через него. В связи с этим можно построить кривую экономии мощности (электроэнергии на привод насоса) в зависимости от расхода через насос.

Конкретный пример кривой экономии мощности дан на рис. 6. Кривая построена для случая системы, состоящей из шести параллельно работающих насосов СЭ-2500-130, один из которых – с регулируемым приводом. Расчеты выполнялись на компьютерной модели теплосети Самарской ТЭЦ [2].

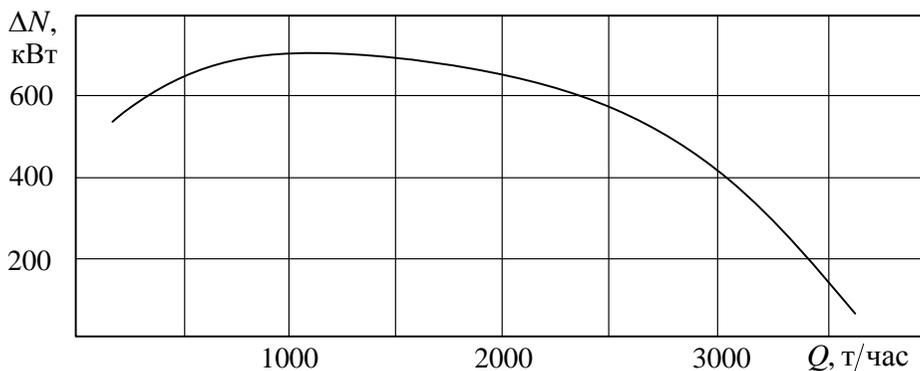


Рис. 6. График зависимости экономии мощности ΔN от расхода насоса с регулируемым приводом

В табл. 1, 2 представлены результаты исследований, полученные для двух вариантов регулирования расхода – задвижкой на выходе одного из насосов (табл. 1) и регулируемым приводом для этого же насоса (табл. 2). Параметром, относительно которого выполнялось регулирование, являлось давление на выходном коллекторе, которое в процессе работы поддерживалось постоянным и равным 145 м вод. ст.

Таблица 1

Регулирование задвижкой

Фактическое число оборотов в мин	Полезно используемая мощность, кВт	Вся затрачиваемая мощность, кВт	Напор на входе, м	Напор на выходе до регулирующей задвижки, м	Расход, м ³ /час	Потеря мощности на задвижке, кВт	Суммарный расход в сети, м ³ /час
3000	971	1197	56	276	1641	715	21060
3000	1193	1417	53	244	2316	624	21570
3000	1225	1600	49	198	3072	485	22110
3000	1032	1600	47	152	3686	64	22560
3000	120	710	63	310	180	568	20010

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что максимальная экономия мощности наблюдается в диапазоне расходов от 500 до 2500 т/час.

Результаты выполненных в настоящей работе исследований качественно согласуются с результатами, полученными в публикации [4] применительно к насосам типа 14НДс.

Таблица 2

Регулирование числом оборотов привода

Фактическое число оборотов в мин	Полезно используемая мощность, кВт	Вся затрачиваемая мощность, кВт	Напор на входе, м	Напор на выходе, м	Расход, м ³ /час	Экономия мощности, кВт	Суммарный расход в сети, м ³ /час
1040	404	482	56	147	1680	715	21060
1160	570	739	53	146	2317	624	21570
1330	787	1115	49	146	3068	485	22110
1480	971	1536	47	146	3678	64	22560
860	39	142	63	146	179	568	20010

Отметим, что регулирование переменного расхода в сети (задвигкой или путем применения регулируемого привода) при постоянном напоре на выходном коллекторе, объединяющем выходные трубопроводы всех параллельно соединенных насосов, выполняется лишь на одном из этих насосов. При этом диапазон регулирования расхода в сети ограничивается максимальной подачей насоса, с помощью которого выполняется регулирование. При колебаниях расхода в сети, превышающих эту величину, необходимо либо выключать один из работающих насосов с нерегулируемым приводом (при уменьшении расхода в сети, превышающем диапазон регулирования), либо включать дополнительный насос с нерегулируемым приводом (при соответствующем увеличении расхода в сети). Дальнейшие изменения расхода в сети регулируются насосом с регулируемым приводом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Соколов Е.Я.* Теплофикация и тепловые сети. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 360 с.
2. *Панамарев Ю.С., Кудинов В.А., Чиликин Ю.П., Котов В.В.* Расчет гидравлических и температурных режимов работы теплосети Самарской ТЭЦ с помощью компьютерной модели // Теплоэнергетика. – 2005. – № 5. – С. 35-39.
3. *Кудинов В.А., Коваленко А.Г., Колесников С.В., Панамарев Ю.С.* Разработка компьютерной модели и исследование работы циркуляционной системы Новокуйбышевской ТЭЦ-2 // Известия АН. Энергетика. – 2001. – № 6. – С. 118-124.
4. *Мягков Ф.Н., Костырев М.Л., Дубаев А.И., Мотовилов Н.В.* Моделирование насосов с регулируемой частотой вращения // Электрические станции. – 2009. – № 6. – С. 54-58.

Статья поступила в редакцию 12 сентября 2013 г.

USING COMPUTATIONAL MODEL FOR INVESTIGATION OF COMBINED ACTION OF PUMPS WITH THE CONTROLLED AND NONCONTROLLED DRIVE

S.V. Kolesnikov, V.A. Kudinov, A.E. Kuznetsova, A.N. Branfileva, M.P. Skvortsova

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

Result of the investigations of combined action of pumps received on computational model with the controlled and uncontrolled drive are given. The curve of saving of power depending on the expenditure via the pump with the controlled drive working as a part of group of pumps with uncontrolled drives is constructed. For pump with controlled drive was received the range of costs, in where is the maximum power saving. This pump is one of the six working parallelly in one sistem. Shown that for regulation of the variable rate on the network at a constant pressure at the output collector, uniting outlet pipes of all pumps connected in parallel, it is enough to install variable speed drive is only one of the pumps.

Keywords: Kirchhoff's laws, pump characteristics curve, hydraulic circuit characteristics, controlled drive, curve of saving of power.

*Sergey V. Kolesnikov (Ph.D. (Techn.)), Doctoral Student.
Vasily A. Kudinov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Anastasiya E. Kuznetsova, Postgraduate Student.
Anastasiya V. Branfileva, Postgraduate Student.
Marina P. Skvortsova, Postgraduate Student.*

УДК 621.315.01

ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТИНЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

В.И. Котенев, А.В. Котенев, А.Н. Татарников

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: akotenev@samgtu.ru

Рассматривается одноэлементная аппроксимация уравнения нестационарной теплопроводности пластины при теплообмене с граничными условиями третьего рода с применением метода интегральных элементов, в котором использована квадратичная координатная функция. Динамика теплообмена пластины представлена типовым звеном второго порядка, для которого построены разностные частотные характеристики в заданном диапазоне относительных частот. Этот диапазон частот позволяет определить область, в которой допустима одноэлементная аппроксимация. Погрешность аппроксимации оценивается исходя из условия обеспечения заданной величины частоты среза системы автоматического управления температурой пластины. Рассмотрен пример определения частоты среза системы при $Bi=1$ и заданных значениях размеров и коэффициента теплопроводности материала пластины. Показано, что в диапазоне относительных частот от 0 до 4 погрешность аппроксимации амплитудно-частотной характеристики не превышает 1 дБ, а фазо-частотной характеристики – 5°.

Ключевые слова: *уравнение нестационарной теплопроводности пластины, аппроксимация, система управления, одноэлементная аппроксимация, метод интегральных элементов, оценка погрешности аппроксимации.*

Известно [1], что точное решение задачи нестационарной теплопроводности, даже для тела простой геометрической формы, выражается в виде бесконечного функционального ряда. Причем, если точное решение получено, то в практических расчетах используются только несколько членов этого ряда. Получение точного решения для тела сложной геометрической формы практически невозможно.

Поэтому разработка приближенных методов решений [2-5] имеет большое прикладное значение. Особенно эта проблема актуальна в решениях задач синтеза систем управления тепловыми процессами, так как модели их объектов управления содержат не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и уравнения в частных производных.

Существующие методы интегральных преобразований, ортогональной проекции [4] и ряд других методов, хотя и позволяют получать сравнительно простые приближенные модели, но они существенно отличаются от тех моделей,

Виктор Иванович Котенев (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».

Александр Викторович Котенев (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий».

Алексей Николаевич Татарников, аспирант.

которые используются в теории систем автоматического управления, и по этой причине их применение крайне ограничено.

Из сравнения модели метода интегральных элементов [6] с точной моделью [7] по переходным характеристикам при скачкообразном изменении граничных условий следует, что они незначительно отличаются лишь на начальных участках, что практически не отражается на конечной температуре нагреваемого тела. Однако, это может негативно отразиться на качестве процесса системы управления, и тем сильнее, чем выше ее быстродействие.

Поэтому погрешность аппроксимации недостаточно оценивать только по временным характеристикам. Удобно ее оценивать еще и по частотным характеристикам объекта управления, исходя из заданного быстродействия системы управления.

Данный подход рассматривается на примере уравнения нестационарной теплопроводности пластины

$$\frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(r, \tau)}{\partial r^2}, \quad (1)$$

$$\tau > 0, \quad 0 \leq r \leq 1$$

с краевыми условиями

$$\theta(r, 0) = 0;$$

$$-\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial r} + \text{Bi}[\theta_c(1, \tau) - \theta(1, \tau)] = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial r} = 0,$$

где $\text{Bi} = \alpha / \lambda R_{\text{п}}$ – число Bi ;

$\tau = at / R_{\text{п}}^2$ – относительное время;

$R = R / R_{\text{п}}$ – относительная толщина пластины;

α – коэффициент теплоотдачи;

λ, a – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности;

$R_{\text{п}}$ – толщина половины пластины;

θ, θ_c – температуры шара и окружающей среды.

В [6] приведены системы обыкновенных дифференциальных и операторных уравнений, которые получены с помощью метода, изложенного в [5]. При однолинейной аппроксимации уравнения пластины система операторных уравнений представлена двумя уравнениями. Одно из них составлено для центра пластины

$$\vartheta_1(p) = \frac{\vartheta_c(p) - T_{21} p \vartheta_2(p)}{T_{11} p + 1},$$

а второе – для поверхности

$$\vartheta_2(p) = \frac{\vartheta_c(p) - T_{12} p \vartheta_1(p)}{T_{11} p + 1},$$

где

$$T_{11} = b_{11}^{(2)} + \frac{b_{11}^{(1)}}{\text{Bi}}; \quad T_{21} = b_{21}^{(2)} + \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}}; \quad T_{22} = \frac{b_{21}^{(1)}}{\text{Bi}}; \quad T_{12} = \frac{b_{11}^{(1)}}{\text{Bi}};$$

$$b_{11}^{(1)} = \frac{m}{m+1}; \quad b_{21}^{(1)} = \frac{1}{m+1}; \quad b_{11}^{(2)} = \frac{m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}; \quad b_{11}^{(2)} = \frac{1}{(m+1)(m+2)};$$

$$\vartheta_c(p) = \frac{\theta_c(p)}{\theta_c}; \quad \vartheta_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\theta_c}; \quad i=1,2.$$

Из этих уравнений можно выразить температуру поверхности пластины относительно температуры греющей среды:

$$\vartheta_2(p) = W_2(p) \vartheta_c(p); \quad (3)$$

$$W_2 = \frac{(T_{11} - T_{12})p + 1}{(T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21})p^2 + (T_{11} + T_{22})p + 1}, \quad (4)$$

где

$$T_{11} = 13/12; \quad T_{21} = 2/3; \quad T_{22} = 1/3; \quad T_{12} = 5/12;$$

$$\text{Bi} = 1; \quad m = 2.$$

Из точного решения уравнения (1) [7] следует, что

$$\vartheta_{2r}(p) = W_2(p) \vartheta_c(p). \quad (5)$$

Передаточная функция, соответствующая точному решению является трансцендентной функцией комплексного переменного p

$$W_{2r} = \frac{\text{ch} \sqrt{p}}{\text{ch} \sqrt{p} + \text{Bi}^{-1} \sqrt{p} \text{sh} \sqrt{p}}.$$

Частотная передаточная функция

$$W_{2r}(p) = \frac{\text{ch} \sqrt{j\omega}}{\text{ch} \sqrt{j\omega} + \text{Bi}^{-1} \sqrt{j\omega} \text{sh} \sqrt{j\omega}}. \quad (6)$$

Подставив в (6)

$$\sqrt{j} = j^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + j\sqrt{\frac{1}{2}}$$

после несложных преобразований получим:

$$L_{2r}(\Omega) = 20 \lg \left(\frac{\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}{a_5^2 + a_6^2} \right); \quad (7)$$

$$\varphi_{2r}(\Omega) = \arctg \left(\frac{a_8}{a_7} \right) \quad (8)$$

где

$$a_7 = a_1 a_2 a_3 + a_3 a_4 a_5; \quad a_8 = a_1 a_2 a_5 - a_3 a_4 a_6; \quad a_5 = a_3 a_4 + \text{Bi}^{-1} x (a_2 a_3 - a_1 a_4);$$

$$a_6 = a_1 a_2 + x \text{Bi}^{-1} (a_1 a_4 + a_2 a_3); \quad a_1 = \sin x; \quad a_2 = \text{sh} x; \quad a_3 = \cos x; \quad a_4 = \text{ch} x;$$

$$x = \sqrt{\frac{\Omega}{2}}; \Omega = \frac{R_{\Pi}^2}{a} \omega; \omega - \text{круговая частота.}$$

Переходные характеристики, точные $\vartheta_{2\tau}(\tau)$ (оригинал выражения (5)) и приближенные $\vartheta_2(\tau)$ (оригинал выражения (3)), при $Vi=1$, $m=1$, приведены на рис.1.

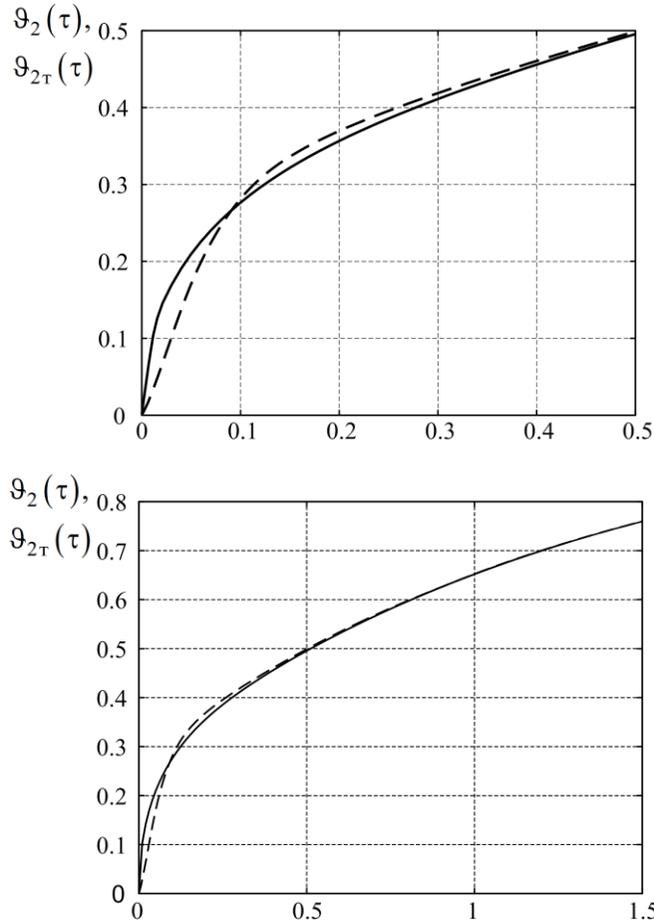


Рис. 1. Точные $\vartheta_{2\tau}(\tau)$ (сплошные линии) и приближенные ϑ_2 (пунктирные линии) характеристики

Разностные логарифмические амплитудная $\Delta L(\Omega) = L_2(\Omega) - L_{2\tau}(\Omega)$ и фазовая $\Delta\varphi(\Omega) = \varphi_{2\tau}(\Omega) - \varphi_2(\Omega)$ частотные характеристики представлены на рис. 2. Характеристики $L_1(\Omega)$, $\varphi_1(\Omega)$ построены по выражению (4), а $L_{2\tau}(\Omega)$, $\varphi_{2\tau}(\Omega)$ - по соотношениям (7), (8).

Из анализа частотных характеристик следует, что в диапазоне частот $0 < \Omega \leq \Omega_1$ ($\Omega_1 = 10^{0,6} \approx 4$) погрешность составляет: фазовой частотной характеристики $\varphi \leq 5^\circ$, амплитудной частотной характеристики - $\Delta L \leq 1$ дБ. Погреш-

ность $\Delta\varphi(\Omega)$ при частотах $\Omega \geq \Omega_1$ растет почти по линейной зависимости, достигая $\Delta\varphi(10^{1.7}) = 30^\circ$, что необходимо учитывать при синтезе регуляторов.

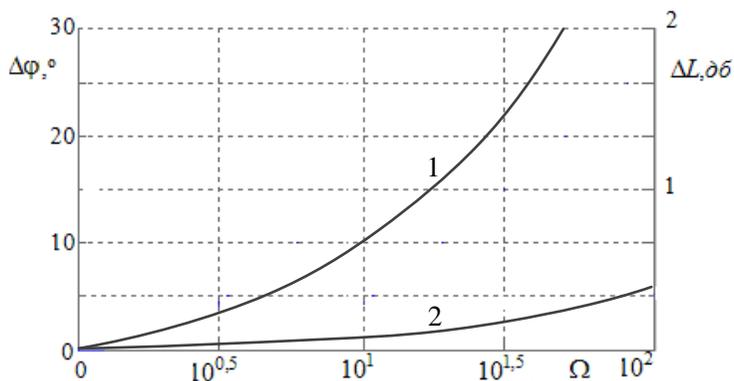


Рис. 2. Погрешность частотных характеристик: фазовой $\Delta\varphi(\Omega)$ – 1; логарифмической амплитудной $\Delta L(\Omega)$ – 2

Например, при управлении температурой стальной пластины, толщина которой составляет

$$R_{\Pi} = 0,03 \text{ м},$$

а коэффициент теплопроводности

$$a = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с},$$

частота среза системы автоматического управления не должна превышать

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{a \Omega_1}{R_{\Pi}^2} = \frac{1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 4}{0,03^2} = 0,0561 \text{ 1/с}.$$

Для повышения быстродействия системы управления может быть использована более сложная математическая модель [6], которая получена при разбиении пластины на большое число частей.

Выводы. Дана количественная оценка погрешности аппроксимации уравнения нестационарной теплопроводности пластины с граничными условиями третьего рода обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями. Показано, что однолинейная аппроксимация допустима при относительных частотах среза систем автоматического управления, не превышающих значений $\Omega = 4$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962 – 708 с.
2. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашиников В.В. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. - М.: Высшая школа, 2005. – 432с.
3. Цой П.В. Методы расчета задач теплопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984. – 416с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. – 392с.
5. Котенев В.И. Приближенный метод решения задач нестационарной теплопроводности // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1983. - №3. - С.111-116.

6. *Котенев В.И., Котенев А.В.* Аппроксимация уравнений теплопроводности конечным числом типовых динамических звеньев // Вестник СамГТУ Техн. науки. - 2013. - Вып.№2 (38). - С. 158 - 163.
7. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

Статья поступила 27 января 2014 г.

ACCURACY APPROXIMATION OF UNSTEADY HEAT CONDUCTION PLATE WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE THIRD KIND

V.I. Kotenev, A.V. Kotenev, A.N. Tatarnikov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

In the paper one-element approximation of the equation of transient heat conduction of plate at heat exchange with boundary conditions of the third kind with application of the method of integral elements in which square coordinate function is used is considered. Dynamics of heat exchange of plate is presented by a standard second order dynamic unit for which difference frequency characteristics in the given range of the relative frequencies are constructed. This frequency range allows determining area in which one-element approximation is admissible. The error of approximation is estimated proceeding from a condition of ensuring the given value of the cutoff frequency of automatic control system of the plate temperature. An example of the system cutoff frequency determination is presented at $Bi=1$ and the preset values of the plate size and the thermal diffusivity of the material of the plate. It is shown that in the range of relative frequencies from 0 to 4 the error of approximation of the amplitude-frequency characteristic does not exceed 1 dB, and the phase-frequency characteristic – 5 °.

Keywords: *equation of a transient heat conduction of a plate, approximation, control system, one-element approximation, method of integral elements, approximation error estimation.*

*Viktor I. Kotenev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Alexander V. Kotenev (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.
Aleksey N. Tatarnikov, Postgraduate Student.*

УДК 517. 958: 539.3(4)

ТЕРМОУПРУГОСТЬ В МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ

А.Э. Кузнецова

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: kuznetsovae@rambler.ru

Путем использования глобальной системы неизвестных коэффициентов, а также системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, задача термоупругости для многослойного тела приведена к задаче для одного слоя с переменными (кусочно-неоднородными) свойствами среды. На основе ортогонального метода Бубнова – Галеркина получено ее приближенное аналитическое решение, позволяющее находить искомые функции практически с заданной степенью точности. При постоянных в пределах каждого слоя физических свойствах среды получено точное аналитическое решение данной задачи и выполнено его исследование в условиях теплового удара на граничных поверхностях.

Ключевые слова: многослойные конструкции, аналитическое решение, задача термоупругости, тепловой удар, переменные физические свойства среды, система координатных функций, ортогональный метод Бубнова – Галеркина.

Сложности решения задач термоупругости с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды состоят в нелинейности исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также в необходимости выполнения условий сопряжения в виде равенства напряжений и перемещений в точках контакта слоев.

Применительно к решению указанных задач в настоящей работе применен метод построения систем координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения. Путем использования ортогонального метода Бубнова – Галеркина решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений сведено к решению системы алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов, число которых равно числу приближений. Получение аналитического решения в данном случае оказывается возможным благодаря использованию глобальной (одинаковой для всех слоев) системы неизвестных коэффициентов.

Математическая постановка задачи термоупругости для длинного полого цилиндра (плоская деформация) в случае, когда модуль упругости и коэффициент линейного расширения в пределах каждого слоя являются произвольными функциями радиуса, имеет вид [1, 2] (рис. 1)

$$\frac{d}{dr} \left(E_i r \frac{dU_i}{dr} \right) + \left(\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{dE_i}{dr} - \frac{E_i}{r} \right) U_i = \frac{(1+\nu_i)r}{1-\nu_i} \frac{d}{dr} (\alpha_i E_i T_i), \quad (1)$$

$$(i = \overline{1, m}; \quad r_i < r < r_{i+1})$$

где $U_i(r)$ ($i = \overline{1, m}$) – перемещение i -го слоя; $E_i(r)$, $\alpha_i(r)$, $T_i(r)$ ($i = \overline{1, m}$) – мо-

дугу упругости, коэффициент линейного расширения и температура i -го слоя; ν_i ($i = \overline{1, m}$) – коэффициент Пуассона; r – радиальная координата; m – число слоев.

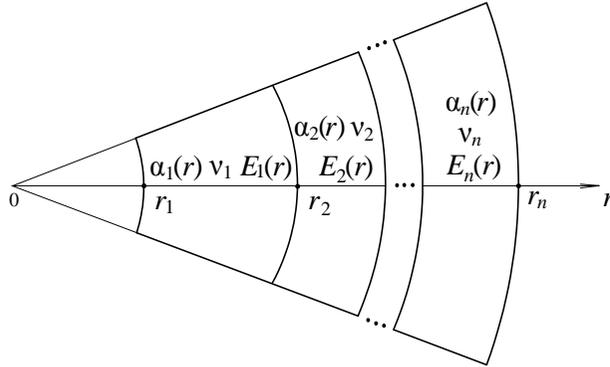


Рис. 1. Схема многослойного полого длинного цилиндра

В случае, когда $E_i = const$ и $\alpha_i = const$, система уравнений (1) приводится к виду

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} - \frac{U_i}{r^2} - \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_i \frac{dT_i}{dr} = 0. \quad (2)$$

$$(i = \overline{1, m}; \quad r_i \leq r \leq r_{i+1})$$

Напряжения в каждом слое по известному перемещению определяются по формулам

$$\sigma_{ri} = \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[(1-\nu_i) \frac{dU_i}{dr} + \nu_i \frac{U_i}{r} - (1+\nu_i) \alpha_i T_i \right]; \quad (3)$$

$$\sigma_{\Theta i} = \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[\nu_i \frac{dU_i}{dr} + (1-\nu_i) \frac{U_i}{r} - (1+\nu_i) \alpha_i T_i \right], \quad (4)$$

где σ_{ri} , $\sigma_{\Theta i}$ ($i = \overline{1, m}$) – радиальное и окружное напряжения в i -м слое.

Основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи (2)–(4) применительно к двухслойному цилиндру с постоянными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды, отмечая при этом, что без каких-либо изменений данный метод может быть применен и к решению задач термоупругости для многослойных конструкций с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами. Граничные условия и условия сопряжения применительно к задаче (2)–(4) для двухслойного цилиндра ($i = 1, 2$) имеют вид

$$\left(a_1 \frac{dU_1}{dr} + \nu_1 \frac{U_1}{r} = c_1 \alpha_1 T_1 \right)_{r=r_1}; \quad (5)$$

$$\left(a_2 \frac{dU_2}{dr} + \nu_2 \frac{U_2}{r} = c_2 \alpha_2 T_2 \right)_{r=r_3}; \quad (6)$$

$$\eta_1 E_1 \left(a_1 \frac{dU_1}{dr} + \nu_1 \frac{U_1}{r} - c_1 \alpha_1 T_1 \right)_{r=r_2} - \eta_2 E_2 \left(a_2 \frac{dU_2}{dr} + \nu_2 \frac{U_2}{r} - c_2 \alpha_2 T_2 \right)_{r=r_2} = 0; \quad (7)$$

$$U_1(r_2) = U_2(r_2) , \quad (8)$$

где $a_1 = 1 - \nu_1$; $a_2 = 1 - \nu_2$; $c_1 = 1 + \nu_1$; $c_2 = 1 + \nu_2$; $\eta_1 = 1 / [(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)]$; $\eta_2 = 1 / [(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)]$.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\vartheta_i = \frac{U_i}{U_i} ; \rho = \frac{r}{r_3} ; \rho_1 = \frac{r_1}{r_3} ; \rho_2 = \frac{r_2}{r_3} ; \rho_3 = \frac{r_3}{r_3} = 1 ; \varepsilon_1 = \frac{E_1}{E_1} = 1 ; \varepsilon_2 = \frac{E_2}{E_1} ;$$

$$\mu_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1} = 1 ; \mu_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} ; \Theta_i = \frac{T_i}{T_i} ; \sigma_{ri}^* = \frac{\sigma_{ri}}{\sigma_i} ; \sigma_{\Theta i}^* = \frac{\sigma_{\Theta i}}{\sigma_i} ; i = 1, 2 , \quad (9)$$

где U_i , T_i , σ_i – масштабные значения перемещения, температуры и напряжения.

С учетом принятых обозначений задача (2), (5) – (8) принимает вид

$$\frac{d^2 \vartheta_i}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vartheta_i}{d\rho} - \frac{\vartheta_i}{\rho^2} - \beta_i \mu_i \alpha_1 r_3 \frac{T_i}{U_i} \frac{d\Theta_i}{d\rho} = 0 ; \quad (10)$$

$$\left(a_1 \frac{d\vartheta_1}{d\rho} + \nu_1 \frac{\vartheta_1}{\rho} - \dot{A}_1 \cdot \Theta_1 \right)_{\rho=\rho_1} = 0 ; \quad (11)$$

$$\left(a_2 \frac{d\vartheta_2}{d\rho} + \nu_2 \frac{\vartheta_2}{\rho} - \dot{A}_2 \cdot \Theta_2 \right)_{\rho=1} = 0 ; \quad (12)$$

$$\eta_1 \varepsilon_1 \left(a_1 \frac{d\vartheta_1}{d\rho} + \nu_1 \frac{\vartheta_1}{\rho} - A_1 \cdot \Theta_1 \right)_{\rho=\rho_2} = \eta_2 \varepsilon_2 \left(a_2 \frac{d\vartheta_2}{d\rho} + \nu_2 \frac{\vartheta_2}{\rho} - A_2 \cdot \Theta_2 \right)_{\rho=\rho_2} ; \quad (13)$$

$$\vartheta_1(\rho_2) = \vartheta_2(\rho_2) , \quad (14)$$

где $\beta_i = (1 + \nu_i) / (1 - \nu_i)$; $i = 1, 2$; $\dot{A}_1 = \frac{c_1 \mu_1 \alpha_1 r_3 T_i}{U_i}$; $\dot{A}_2 = \frac{c_2 \mu_2 \alpha_1 r_3 T_i}{U_i}$.

Формулы (3), (4) для безразмерных напряжений будут

$$\sigma_{ri}^* = \eta_i \varepsilon_i \left[a_i \frac{d\vartheta_i(\rho)}{d\rho} + \nu_i \frac{\vartheta_i(\rho)}{\rho} - \frac{c_i \mu_i \alpha_1 r_3 T_i}{U_i} \Theta_i(\rho) \right] / \sigma_i ; \quad (15)$$

$$\sigma_{\Theta i}^* = \eta_i \varepsilon_i \left[\nu_i \frac{d\vartheta_i(\rho)}{d\rho} + a_i \frac{\vartheta_i(\rho)}{\rho} - \frac{c_i \mu_i \alpha_1 r_3 T_i}{U_i} \Theta_i(\rho) \right] / \sigma_i \quad (i = 1, 2). \quad (16)$$

Найдем решение задачи (10) – (16) для случая, когда температура в каждом слое описывается следующей функцией:

$$T_i(r) = D_i + R_i r , \quad (i = 1, 2) , \quad (17)$$

где $D_1 = 140,32$; $R_1 = -2880$; $D_2 = 53,375$; $R_2 = -625$.

Соотношение (17) в безразмерном виде для каждого слоя будет

$$\Theta_1(\rho) = 1,4032 - 1,584\rho ; \quad \Theta_2(\rho) = 0,53375 - 0,34375\rho . \quad (18)$$

Решение задачи (10) – (14) принимается в виде [3]

$$\vartheta_1(\rho) = \Phi_1(\rho) + \sum_{k=2}^n q_k \varphi_{1k}(\rho); \quad (19)$$

$$\vartheta_2(\rho) = \Phi_2(\rho) + \sum_{k=2}^n q_k \varphi_{2k}(\rho), \quad (20)$$

где $\Phi_1(\rho) = F_1 + F_2\rho + F_3\rho^2$, $\Phi_2(\rho) = F_4\rho$ – функции, неизвестные коэффициенты которых F_i ($i = \overline{1,4}$) определяются так, чтобы выполнялись неоднородные граничные условия (11) и (12), неоднородное условие сопряжения (13) и однородное условие сопряжения (14); $\varphi_{1k} = B_{1k} + B_{2k}\rho + B_{3k}\rho^k$, $\varphi_{2k} = 1 + B_{4k}\rho^k$ ($k = \overline{2,n}$) – координатные функции, неизвестные коэффициенты B_{ik} ($i = \overline{1,4}$; $k = \overline{2,n}$) которых находятся из однородных граничных условий (11), (12) и однородных условий сопряжения (13), (14), то есть при равенстве нулю всех членов, находящихся в произведении с $\Theta_1(\rho)$ и $\Theta_2(\rho)$; q_k ($k = \overline{2,n}$) – неизвестные коэффициенты (одинаковые для каждого слоя), определяемые из выполнения дифференциальных уравнений (10).

После нахождения методом неопределенных коэффициентов F_i ($i = \overline{1,4}$) и B_{ik} ($i = \overline{1,4}$; $k = \overline{2,n}$) соотношения (19), (20) при любых значениях неизвестных коэффициентов q_k ($k = \overline{2,n}$) будут точно удовлетворять граничным условиям (11), (12) и условиям сопряжения (13), (14). Для определения неизвестных коэффициентов q_k ($k = \overline{2,n}$) составляется невязка уравнений (10) и требуется ортогональность невязок ко всем координатным функциям $\varphi_{1k}(\rho)$ и $\varphi_{2k}(\rho)$ ($k = \overline{2,n}$), то есть

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{d^2 \vartheta_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vartheta_1}{d\rho} - \frac{\vartheta_1}{\rho^2} - \beta_1 \mu_1 \alpha_1 r_3 \frac{T_i}{U_i} \frac{d\Theta_1}{d\rho} \right) \varphi_j(\rho) d\rho + \\ & + \int_{\rho_2}^1 \left(\frac{d^2 \vartheta_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vartheta_2}{d\rho} - \frac{\vartheta_2}{\rho^2} - \beta_2 \mu_2 \alpha_1 r_3 \frac{T_i}{U_i} \frac{d\Theta_2}{d\rho} \right) \varphi_j(\rho) d\rho = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

($j = k = \overline{2,n}$)

Подставляя (19), (20) в (21), после определения интегралов относительно неизвестных коэффициентов q_k ($k = \overline{2,n}$) будем иметь систему $n - 2$ алгебраических линейных уравнений.

После определения неизвестных коэффициентов q_k ($k = \overline{2,n}$) перемещения находятся по формулам (19), (20). Напряжения σ_r^* и σ_θ^* по известным перемещениям находятся из соотношений (15) – (16). Исходные данные для решения задачи были следующие [3, 4, 5]:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,014 \text{ м}; \quad r_2 = 0,039 \text{ м}; \quad r_3 = 0,055 \text{ м}; \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,2; \quad E_1 = 19,5 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2; \\ \sigma_i &= 0,1107 \text{ кг/м}^2; \quad E_2 = 13 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2; \quad \alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} / \text{К}; \quad \alpha_2 = 11 \cdot 10^{-6} / \text{К}; \quad T_i = 100^\circ \text{C}; \\ U_i &= 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Результаты расчетов безразмерных радиальных и окружных напряжений по формулам (15), (16) во втором, шестом и десятом приближениях даны на рис. 2 – 7. Их анализ позволяет сделать вывод о том, что радиальные напряжения σ_r^* имеют отрицательный знак (сжатие). При этом на внешних поверхностях стенок ($\rho = \rho_1$ и $\rho = 1$), как это следует из граничных условий (11), (12), они равны нулю. Окружные напряжения σ_θ^* в пределах первого слоя имеют отрицательный знак, а в пределах второго – положительный (растяжение). В точке контакта слоев ($\rho = \rho_2$) наблюдается скачок окружных напряжений. Оценка точности получаемых решений выполнялась путем определения невязки уравнений (10), которая, как показали исследования, с увеличением числа приближений уменьшается.

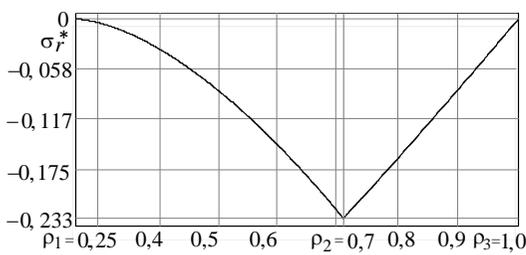


Рис. 2. Изменение радиальных напряжений (второе приближение)

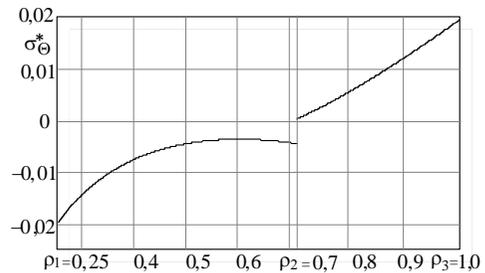


Рис. 3. Изменение окружных напряжений (второе приближение)

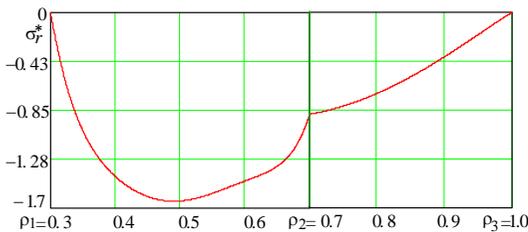


Рис. 4. Изменение радиальных напряжений (шестое приближение)

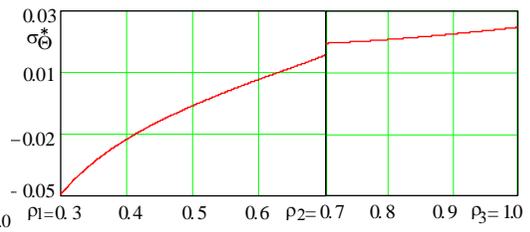


Рис. 5. Изменение окружных напряжений (шестое приближение)

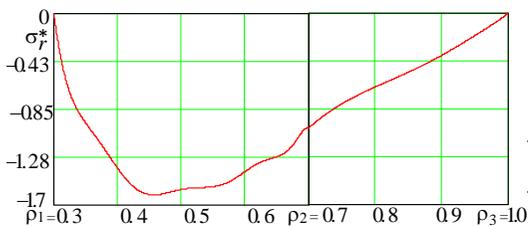


Рис. 6. Изменение радиальных напряжений (десятое приближение)

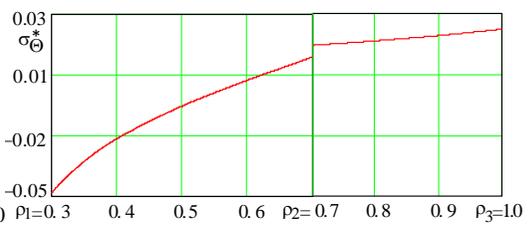


Рис. 7. Изменение окружных напряжений (десятое приближение)

Математическая постановка задачи термоупругости для двухслойного цилиндра при постоянных в пределах каждого слоя физических свойствах среды имеет вид [3 – 5]

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} - \frac{U_i}{r^2} - \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_i \frac{dT_i}{dr} = 0; \quad (r_i \leq r \leq r_{i+1}; \quad i = \overline{1,2}); \quad (22)$$

$$\sigma_{r1}(r_1) = 0; \quad (23)$$

$$\sigma_{r2}(r_3) = 0; \quad (24)$$

$$\sigma_{r1}(r_2) = \sigma_{r2}(r_2); \quad (25)$$

$$U_1(r_2) = U_2(r_2). \quad (26)$$

Общий интеграл уравнения (22) записывается в виде

$$U_i = C_{1i} r + \frac{C_{2i}}{r} + \frac{(1+\nu_i)\alpha_i}{(1-\nu_i)r} \int_{r_i}^r T_i(r) r dr, \quad (r_i \leq r \leq r_{i+1}; \quad i = \overline{1,2}), \quad (27)$$

где C_{1i}, C_{2i} – постоянные интегрирования.

Формулы для определения радиальных $\sigma_{ri}(r)$ и окружных $\sigma_{\theta i}(r)$ напряжений в i -ом слое имеют вид

$$\sigma_{ri}(r) = \frac{C_{1i} E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} - \frac{C_{2i} E_i}{(1+\nu_i)r^2} - \frac{\alpha_i E_i}{(1-\nu_i)r^2} \int_{r_i}^r T_i(r) r dr; \quad (28)$$

$$\sigma_{\theta i}(r) = \frac{C_{1i} E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} + \frac{C_{2i} E_i}{(1+\nu_i)r^2} - \frac{\alpha_i E_i}{1-\nu_i} T_i(r) + \frac{\alpha_i E_i}{(1-\nu_i)r^2} \int_{r_i}^r T_i(r) r dr. \quad (29)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{1i}, C_{2i} используются граничные условия (23), (24) и условия сопряжения (25), (26). Подставляя (27) в (23) – (26), относительно постоянных интегрирования C_{1i}, C_{2i} ($i = \overline{1,2}$) получаем систему из четырех алгебраических линейных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} C_{11} D_1 + C_{12} D_2 / r_1^2 &= 0; \\ C_{11} D_1 + C_{12} (D_2 / r_2^2 + B_2) + C_{22} B_3 + B_1 &= 0; \\ C_{11} r_2 + C_{12} / r_2 + D_3 - C_{21} r_2 - C_{22} / r_2 &= 0; \\ C_{21} B_3 + C_{22} D_4 - D_5 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\text{где } B_1 = \frac{\alpha_1 E_1}{(1-\nu_1)r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} T_1(r) r dr; \quad B_2 = \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}; \quad B_3 = \frac{E_2}{(1+\nu_2)r_2^2};$$

$$D_1 = \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}; \quad D_2 = \frac{E_1}{(1+\nu_1)}; \quad D_3 = \frac{(1+\nu_1)\alpha_1}{(1-\nu_1)r_2} \int_{r_1}^{r_2} T_1(r) r dr;$$

$$D_4 = \frac{E_2}{(1+\nu_2)r_3^2}; \quad D_5 = \frac{E_2 \alpha_2}{(1-\nu_2)r_3} \int_{r_2}^{r_3} T_2(r) r dr.$$

После определения постоянных интегрирования из решения системы урав-

нений (30) перемещения и напряжения находятся по формулам (27) – (29).

На рис. 8 – 11 приведены графики распределения окружных σ_θ и радиальных σ_r напряжений при тепловом ударе (граничные условия первого рода) различной интенсивности на внешней ($r = r_3$) поверхности цилиндра. В частности, для различных вариантов расчета температура на поверхности была равной 250; 500; 750; 1000°C. При этом распределение температуры во втором слое принималось линейно изменяющимся от нуля в точке контакта ($r = r_2$) до величины температуры на поверхности при соответствующем варианте расчета. Температура по всей толщине первого слоя была одинаковой и равной 0°C. Физические свойства слоев для двухслойного цилиндра были следующие: $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $E_1 = 10,5 \cdot 10^4 \text{ ЇЇà}$; $E_2 = 40,5 \cdot 10^4 \text{ ЇЇà}$.

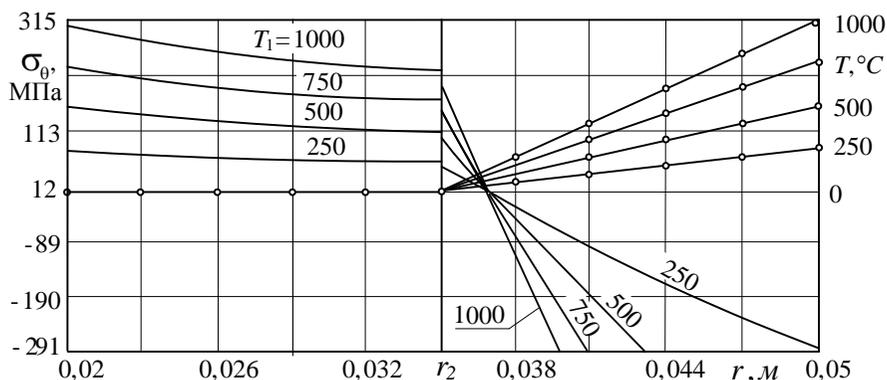


Рис. 8. Распределение окружных напряжений и температуры в двухслойном цилиндре: — — напряжения σ_θ (расчет по формуле (29)); —○— — распределение температуры

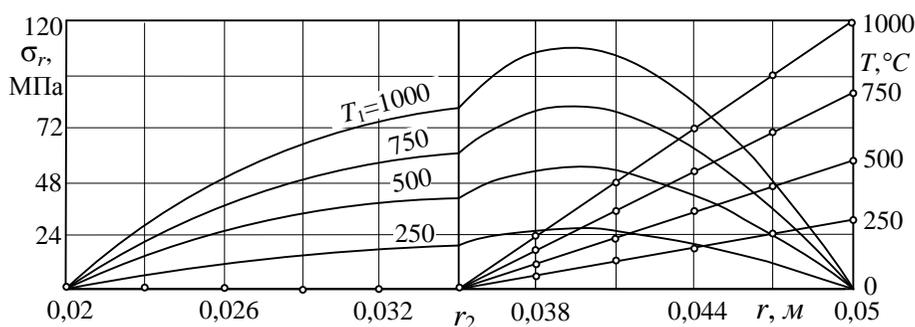


Рис. 9. Распределение радиальных напряжений и температуры в двухслойном цилиндре: — — напряжения σ_r (расчет по формуле (28)); —○— — распределение температуры

На графиках рис. 10, 11 приведены результаты расчета окружных и радиальных напряжений в случае, когда физические свойства слоев различны. Их анализ позволяет заключить, что окружные напряжения в точке контакта ($r = r_2$) имеют разрыв (см. рис. 8, 10). При этом на внешней поверхности наблюдаются окруж-

ные напряжения сжатия, а на внутренней – растяжения. Особенностью радиальных напряжений является наличие излома кривых в точке контакта слоев (см. рис. 9, 11).

На рис. 10, 11 приведены окружные и радиальные напряжения для двухслойного цилиндра в случае, когда температура в пределах второго слоя принимается одинаковой по его толщине ($T_2 = 250; 500; 750; 1000$ °C) при неизменной и равной 0°C температуре первого слоя. Такое распределение температуры может наблюдаться при существенно отличающихся коэффициентах теплопроводности слоев, когда теплопроводность второго слоя значительно превышает теплопроводность первого.

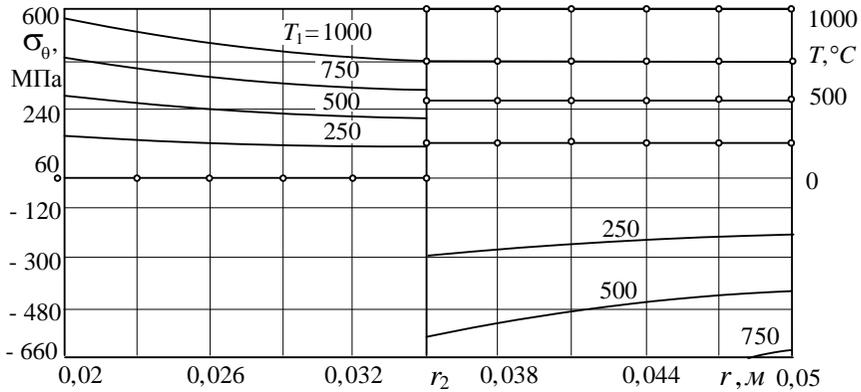


Рис. 10. Распределение окружных напряжений и температуры в двухслойном цилиндре: — — напряжения σ_θ (расчет по формуле (29)); —○— — распределение температуры

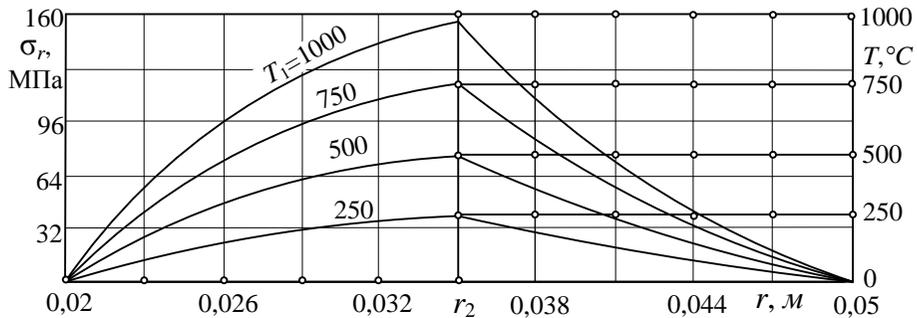


Рис. 11. Распределение радиальных напряжений и температуры в двухслойном цилиндре: — — напряжения σ_r (расчет по формуле (28)); —○— — распределение температуры

Анализ температурных напряжений для этого случая позволяет заключить, что окружные напряжения в точке контакта слоев имеют значительный скачок (см. рис. 10). При этом на внешнем слое цилиндра наблюдаются окружные напряжения сжатия, а на внутреннем – растяжения. Радиальные напряжения имеют положительный знак при изломе кривых в точке контакта слоев.

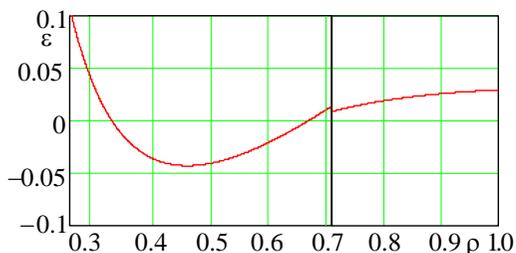


Рис. 12. Невязка уравнений (10)
(второе приближение)

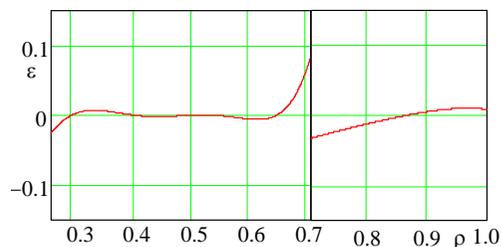


Рис. 13. Невязка уравнений (10)
(шестое приближение)

На рис. 12, 13 показано изменение невязки уравнений (10) в диапазоне независимой переменной $r_1 \leq r \leq r_3$ во втором и шестом приближениях. Анализ графиков позволяет заключить, что с увеличением числа приближений невязка уменьшается.

Выводы

1. При использовании системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, получено приближенное аналитическое решение задачи термоупругости для двухслойного цилиндра с переменными физическими свойствами среды. Использование глобальной системы неизвестных коэффициентов позволяет свести решение исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к решению системы алгебраических линейных уравнений, число которых равно числу приближений. Показано, что с увеличением числа приближений точность получаемого решения возрастает, что подтверждается уменьшением невязки исходных дифференциальных уравнений.

2. Показано, что при воздействии теплового удара на внешней поверхности цилиндра окружные температурные напряжения имеют противоположные знаки на внешней (отрицательные – напряжения сжатия) и внутренней (положительные – напряжения растяжения) поверхностях. В точке контакта слоев наблюдается скачок окружных напряжений, величина которого зависит от соотношения физических свойств слоев.

3. Максимальные окружные напряжения растяжения устанавливаются в момент времени, когда фронт температурного возмущения достигает внутренней поверхности цилиндра. Полученный результат позволяет сделать вывод, что окружные температурные напряжения растяжения могут достигать значительных величин на внутренних поверхностях цилиндрических тел, несмотря на отсутствие на них тепловой нагрузки.

4. Максимальные величины окружных напряжений растяжения, а также их скачок в точке контакта слоев наблюдаются в случае, когда температура внешнего слоя постоянна по его толщине (высокотеплопроводный материал) и превышает температуру внутреннего слоя (см. рис. 10, 11). Этот факт позволяет сделать заключение о том, что удаление различного рода отложений (накипь, кокс и прочее) на внутренних поверхностях трубопроводов посредством создания в слое отложений больших значений окружных напряжений, значительно превы-

шающих предел прочности их материала, возможно путем создания теплового удара на наружных поверхностях трубопроводов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наукова думка, 1965. – 202 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашиников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. – 430 с.
4. Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Котова Е.В. Получение точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных цилиндрических конструкций // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (27). – С. 188-191.
5. Кудинов В.А., Кузнецова А.Э., Ерёмин А.В., Котова Е.В. Аналитические решения задач термоупругости в многослойных конструкциях с переменными физическими свойствами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2013. – № 1 (30). – С. 215-221.

Статья поступила в редакцию 5 января 2014 г.

THERMOELASTICITY IN MULTILAYER STRUCTURES WITH VARIABLE PHYSICAL PROPERTIES OF THE MEDIUM

A.E. Kuznetsova

Samara State Technological University
244, Molodogvardejskaya st., Samara, 443100, Russia

E-mail: kuznetsovaae@rambler.ru

Using the system of coordinate functions that precisely satisfy the boundary conditions and conditions mates, the problem of thermoelasticity for laminated body is given to the problem for a single layer with variables (ku-juicy-inhomogeneous) the properties of the medium.

On the basis of orthogonal method of Bubnov – Galerkin received its approximate analytical solution. At constant within each layer, the physical properties of the environment, the exact analytical solution for the multilayered structure and its detailed study under different conditions of heat stress.

Keywords: *multilayer construction, analytical solution, thermal shock, the thermoelasticity task, environmental variable physical properties, system of coordinate functions, orthogonal method of Bubnov – Galerkin.*