

Энергетика

УДК 519.6

Т.А. Бенгина

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ГАЗОВОГО АЗОТИРОВАНИЯ

В качестве объекта управления рассматривается процесс газового азотирования. Задача оптимизации ставится как проблема определения технологических режимов, которые обеспечивают в результате процесса азотирования заданное распределение концентрации азота в слое либо минимизацию продолжительности процесса при определенной структуре слоя.

Важнейшей характеристикой деталей и узлов машин и агрегатов является ресурс их работы. Этот ресурс определяется в основном износостойкостью и выносливостью деталей при различных механических воздействиях. В современных отраслях промышленности для повышения износостойкости деталей используют упрочняющие технологии, приводящие к изменению физико-механических свойств детали. Одним из методов поверхностного упрочнения деталей является газовое азотирование, заключающееся в поверхностном насыщении изделия азотом. В результате этой обработки на поверхности деталей образуется многофазный диффузионный слой. Задачи массопереноса с наличием фазовых переходов и подвижной границей классифицируются как задачи типа Стефана [7]. Возможность получения на поверхности изделия той или иной фазы, а также заданной комбинации фаз, приводит к изменению свойств детали: повышению поверхностной твердости, износостойкости, усталостной выносливости, теплостойкости и коррозионной стойкости [3].

Определение требуемого профиля концентрации азота в диффузионном слое по заданным критериям эксплуатационного качества изделия на основании современной теории металловедения затруднительно. Однако накоплено достаточно эмпирических данных для выработки практических рекомендаций, что позволяет на практике заменить задачу на экстремум механических свойств изделия на задачу минимизации отклонения полученного профиля распределения концентрации азота в слое от требуемого [5,6]. При этом сохраняется исходная цель – увеличение ресурса работы упрочненного путем азотирования изделия. Если технологические условия позволяют задать некоторое допустимое отклонение профилей, то, используя его как ограничение, целесообразно поставить задачу минимизации общего времени технологического цикла и тем самым повысить пропускную способность оборудования. Оптимизация переходных режимов проходных печей для азотирования дает существенный эффект в условиях частой смены партий обрабатываемых деталей, отличающихся заданной толщиной азотированного слоя, маркой слоя или геометрией и в промышленной практике встречается редко.

С эксплуатационной точки зрения под состоянием объекта управления понимается весь комплекс механических, прочностных свойств изделия. Однако при математическом описании процесса азотирования возникает ряд не преодоленных в настоящее время трудностей. Так, на механические свойства азотированной термообработанной стали влияет скорость охлаждения деталей в закалочной ванне, при этом градиенты температуры в процессе охлаждения практически не поддаются измерению в производственных условиях. Сложно учесть расположение деталей в загрузке и их геометрию: отсутствует эффективная методика определения микротвердости стали на глубине азотируемого слоя. Поэтому при формализации процесса используются общепринятые допущения, которые дают возможность применять к технологии азотирования аппарат оптимального управления процессами с распределенными параметрами [2]. Во-первых, предполагается однозначная зависимость механических свойств стали от концентрации азота. Во-вторых, математическая модель процесса обычно рассматривается как одномерная, а деталь моделируется полубесконечным телом вследствие малости толщины азотированного слоя по сравнению с габаритами изделия и его кривизной. Таким образом, в дальнейшем под состоянием объекта управления подразумевается распределение концентрации азота по глубине поверхностного слоя материала в произвольный момент времени процесса.

Многофазная диффузия в плоском полубесконечном теле описывается дифференциальным уравнением диффузии, которое в каждой из фаз α , γ' и ε , характерных для процесса газового азотирования железа, имеет следующий вид [3,6]:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i(C) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где $\tau > 0$; $\xi_{i-1} < x < \xi_i$; $D_i(C)$ - коэффициент диффузии азота в i -той фазе, $i=1,2,3$; $C(x, \tau)$ - концентрация азота в точке x в момент времени τ , при этом α -фазе присваивается номер 1, γ' -фазе – 2, ε - фазе – 3, т.е. $i=1 \rightarrow i=\alpha$, $i=2 \rightarrow i=\gamma'$, $i=3 \rightarrow i=\varepsilon$.

Для однозначного решения уравнения диффузии необходимо задать краевые (начальные и граничные) условия, которым должно удовлетворять значение концентрации диффундирующего элемента в диффузионном слое.

Начальное распределение концентрации азота в слое $C_0(x)$ и положение i -той межфазной границы ξ_{i0} может быть произвольным.

$$C(x, 0) = C_0(x); \quad (2)$$

$$\xi_i(\tau)|_{\tau=0} = \xi_{i0}. \quad (3)$$

На границе «насыщающая среда – матрица» наиболее достоверно описывают реальный процесс азотирования граничные условия III рода, хотя значительно усложняют решение уравнения диффузии.

$$-D_i \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta_i (\Pi_N^0 - \Pi_N^i), \quad (4)$$

где β_i - коэффициент массопереноса для i -той фазы; Π_N^0 - азотный потенциал печной атмосферы, Π_N^i - равновесный азотный потенциал соответствующей фазы, $\Pi_N^0 = \frac{P_{NH_3}}{P_{H_2}}$, P_{NH_3} , P_{H_2} - парциальные давления аммиака и водорода соответственно.

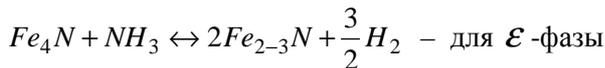
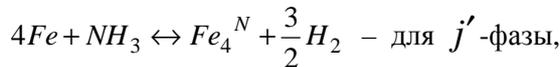
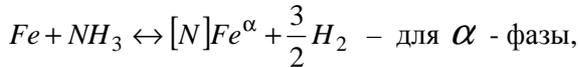
$$\Pi_N^\alpha = 5,17 \cdot 10^{-5} \exp(8933/T) C(x, \tau); \quad (5)$$

$$\Pi_N^{j'} = \frac{4,279 \cdot 10^{-5} \exp(7045/T) (C(x, \tau) - 5,77) - 6,199 \exp(4358/T + 3) (C(x, \tau) - 5,88)}{5,9 - C(x, \tau)}; \quad (6)$$

$$\Pi_N^\varepsilon = 2,33 \cdot 10^{-4} \exp(7045/T) \frac{11,12 - C_{\min}^\varepsilon}{C_{\min}^\varepsilon - 5,94} \cdot \frac{C(x, \tau) - 5,94}{11,12 - C(x, \tau)}; \quad (7)$$

$\Pi_N^i = \Pi_N^i(C, T)$ - определяет поток диффундирующего элемента через поверхность раздела «металл – насыщающая атмосфера».

Выражения для равновесных азотных потенциалов (5), (6), (7) получены для реакций



с использованием известных экспериментальных данных [3].

При этом допущение о полубесконечности обрабатываемого тела приводит к условию

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Условия на границах раздела фаз

$$\begin{aligned} C(x_i, \tau) \Big|_{x_i = \xi_{i-0}} &= C_i^-; \\ C(x_i, \tau) \Big|_{x_i = \xi_{i+0}} &= C_i^+. \end{aligned} \quad (9)$$

Закон движения границы, разделяющей две различные фазы, который выражает собой условие баланса вещества при фазовых переходах, имеет вид [3]

$$j_i \frac{d\xi_i}{d\tau} = D_i \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{\varepsilon+0} - D_{i-1} \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{\varepsilon-0}, \quad (10)$$

где $j_i = C_i^- - C_i^+$; $i = \overline{1, N}$; N – общее число областей, разделенных фазовыми переходами.

Для стандартной технологии азотирования $N=3$.

Рассмотренная модель (1)-(10) процесса азотирования позволяет связать его основные технологические параметры (состав газовой атмосферы, давление, температуру) со структурой, фазовым составом и толщиной азотированного слоя, которые определяются распределением концентрации азота по толщине диффузионного слоя.

Требуемое конечное состояние $C^*(x)$ задается рядом технологических требований, связывающих распределение азота по глубине слоя с эксплуатационными характеристиками изделия. Обычно в результате азотирования требуется получить постоянное заданное содержание азота в поверхностном слое деталей, имеющем толщину 30-50% общей глубины азотирования.

В ходе азотирования нет необходимости добиваться точной реализации заданного профиля концентрации азота по глубине детали, так как в производственных условиях всегда существует ряд неконтролируемых возмущений процесса – вариации начального содержания азота в стали, нестабильность газового состава среды, неравномерность потока атмосферы в загрузке и т.д. Следует учесть также заметную погрешность измерения результатов процесса, т.е. полученного профиля концентрации азота или толщины азотированного слоя. В таких условиях естественной является постановка задачи максимального приближения полученного профиля к заданному с учетом ограничений на управляемость процесса. Мерой приближения может быть среднеквадратичное отклонение заданного $C^*(x)$ и результирующего $C(x, \tau_{кон.})$ профилей по глубине $x \leq h$ азотируемого слоя размером h :

$$I = \int_0^h [C(x, \tau_{кон.}) - C^*(x)]^2 dx \rightarrow \min. \quad (11)$$

Критерий оценки (11) очень удобен в вычислительной практике, однако имеет серьезный недостаток. Так, возможны реальные ситуации, когда при удовлетворительно близком расположении кривых $C(x, \tau_{кон.})$ и $C^*(x)$ почти на всем слое h будет наблюдаться значительное расхождение концентрации азота на поверхности $x=0$. Намного более технологичен критерий минимизации максимального абсолютного расхождения заданного и результирующего профилей на том же интервале $(0, h)$:

$$I = \max_{0 \leq x \leq h} |C(x, \tau_{кон.}) - C^*(x)| \rightarrow \min. \quad (12)$$

Если же априори задаться величиной допустимого расхождения профилей \mathcal{E} , которая определяется технологическими требованиями, то критерий (12) преобразуется в ограничение на качество азотирования:

$$\max_{0 \leq x \leq h} |C(x, \tau_{кон.}) - C^*(x)| \leq \mathcal{E}, \quad (13)$$

и тогда оптимизируемым параметром становится полное время процесса $\tau = \tau_{кон.}$. В (12) оценивается производительность оборудования

$$I = \int_0^{\tau_{кон.}} d\tau = \tau_{кон.} \rightarrow \min \quad (14)$$

при заданном качестве азотирования (12).

Расчет таких технологических режимов, которые приблизили бы в конце процесса азотирования полученный профиль распределения концентрации азота к заданному либо к сокращению времени процесса при достижении допустимого отклонения распределения от заданного, составляет задачу оптимизации.

Таким образом, можно сформулировать задачу оптимального управления процессом азотирования:

определить алгоритм изменения во времени управляющего воздействия $\varphi(\tau)$, стесненного ограничением

$$\varphi^- \leq \varphi(\tau) \leq \varphi^+ \quad (15)$$

и переводящего объект управления (1)-(10) из начального состояния (2) за минимальное время $t = \tau_{\text{кон}}$. В область Ω

$$C(x, \tau_{\text{кон}}) \in \Omega, \Omega : \left\{ C(x, \tau_{\text{кон}}) : \max_x |C(x, \tau_{\text{кон}}) - C^*(x)| \leq \varepsilon_3 \right\}, \quad (16)$$

не допуская в ходе этого процесса нарушения ограничений (15) на параметры управления.

В реальных условиях, однако, заданный профиль не всегда можно получить по чисто технологическим условиям. В этом случае ставится задача наилучшего в данных условиях приближения к заданному профилю азота: определить алгоритм изменения во времени управляющего воздействия $\varphi(\tau)$, стесненного ограничением (15) и переводящего объект управления (1)-(10) из начального состояния (2) в конечное состояние $C(x, \tau_{\text{кон}})$ с минимально возможным отклонением (12) от заданного распределения $C^*(x)$.

Оптимальное управление рассматриваемым процессом относится к задачам оптимизации объектов с распределенными параметрами. Решению подобных задач посвящены основополагающие исследования отечественных учёных А.Г. Бутковского [1,2], Э.Я. Рапопорта [8], Т.К. Сиразетдинова, Ю.В. Егорова [4], К.А. Лурье [7], а также зарубежных – Ж.К. Лионса, П. Вэнга и других. Для решения поставленных задач использован альтернативный метод оптимизации Э.Я. Рапопорта [8]. Полученные результаты демонстрируют его высокую эффективность.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977. 320 с.
3. Булгач А.А., Солодкин Г.А., Глиберман Б.А. Моделирование на ЭВМ кинетики роста нитридов в азотированном слое.// МиТОМ, 1984. №1. С. 30-35.
4. Егоров Ю.В. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами // Математика на службе инженера. Основы теории оптимального управления. М.: Знание, 1973. С.187-199.
5. Лахтин Ю.М., Коган Я.Д. Азотирование стали. М.: Машиностроение, 1976. 256 с.]
6. Бенгина Т.А., Лившиц М.Ю. Конечно-разностная схема решения задачи типа Стефана с преобразованием координат.// Вестник СамГТУ. Сер. Физико-математические науки, 1998. №6. С. 123-125.
7. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.
8. Рапопорт Э.Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.

Статья поступила в редакцию 26 января 2007 г.

УДК 621.78.68.3

А.Л. Головской, М.Ю. Деревянов, А.Г. Ищук, М.Ю. Лившиц, В.С. Муратов

ОПТИМИЗАЦИЯ ВАКУУМНОЙ ЦЕМЕНТАЦИИ КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Разработана математическая модель вакуумной цементации в атмосфере ацетилена. Осуществлена оптимизация технологического процесса вакуумной цементации шарошек буровых долот. Представлены результаты сравнения концентрационных профилей углерода поверхностного слоя деталей, подвергшихся обработке в предлоленном и традиционном режимах, демонстрирующие эффективность метода.

В современной промышленности для повышения износостойкости металлических деталей используют упрочняющие технологии, приводящие к изменению физико-механических свойств поверхности детали. Наиболее распространенной среди таких технологий является цементация, заключающаяся в насыщении поверхности детали углеродом. В последнее время вместо традиционной газовой цементации в шахтных и проходных печах все чаще применяют вакуумную цементацию, обеспечивающую существенное повышение качества поверхности и производительности оборудования по сравнению с газовой цементацией.

Математическая модель диффузии углерода из атмосферы через поверхность детали в глубину при постоянной температуре, согласно второму закону Фика, может быть принята в форме дифференциального уравнения массопереноса:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(C) \cdot \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где $C(x, \tau)$ - концентрация углерода в детали; $D(C)$ - коэффициент диффузии углерода в сталь [1].

Полагая, что коэффициент диффузии незначительно зависит от концентрации, уравнение диффузии можно линеаризовать:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 C(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Граничными условиями, наиболее точно отражающими физику переноса углерода из газовой фазы к поверхности, являются граничные условия III рода [1]:

$$-D \cdot \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta(\tau) \cdot (\varphi(\tau) - C(x, \tau) \Big|_{x=0}). \quad (3)$$

С учетом незначительной толщины $x = h_{cl}$ диффузионного слоя по сравнению с размерами детали и относительно малого времени цементации $t = t_i$, значительно меньшего, чем полное время насыщения, можно считать деталь полубесконечным телом с адиабатическими условиями:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\beta(\tau)$ - коэффициент массопереноса; $\varphi(\tau)$ - углеродный потенциал атмосферы. Начальное распределение концентрации углерода в слое можно принять постоянным:

$$C(x, 0) = C_0 = const. \quad (5)$$

В ходе диффузионного насыщения нет необходимости и технической возможности обеспечить в конце процесса точную реализацию заданного профиля $C^*(x)$, так как в производственных условиях всегда существует ряд неконтролируемых возмущений: вариации начального содержания углерода в стали C_0 , нестабильность газового состава среды, неравномерность потока атмосферы и т.д. Кроме того, заданный профиль $C^*(x)$ может не принадлежать решениям краевой задачи (2) – (5), что свидетельствует о его принципиальной недостижимости. В процессе цементации, естественно, требуется безусловное выполнение ограничений на максимальное значение концентрации углерода в металле, связанное с карбидообразованием и рядом других условий:

$$C(x, \tau) \leq C_{max}, \forall \tau \in [0, t_i], \forall x \in [0, \infty), \quad (6)$$

а также технические ограничения углеродного потенциала:

$$0 \leq \varphi(\tau) \leq \varphi_{max}. \quad (7)$$

В реальных условиях допустимых диапазонов изменения параметров технологической и эксплуатационной ветвей структурной модели требуемое результирующее состояние процесса цементации трансформируется из заданного распределения концентрации $C^*(x)$ в некоторую область $\bar{\Omega}_c$ – «трубку» допустимых отклонений $C^*(x) \pm \rho(x)$, $0 < \rho(x) < C^*(x)$, которая характеризуется Чебышевской мерой [2,3]:

$$\varepsilon = \max_{x \in [0, h_{cl}]} |C^*(x) - \rho(x)|. \quad (8)$$

Естественно, для получения наибольшей износостойкости величина ε должна быть минимальной. Таким образом, для объекта управления (2) – (5) в условиях ограничений (6) – (7) формулируются следующие задачи.

Задача быстрогодействия:

$$J_{\tau}^{opt} = \min_{\varphi(\tau)} t_i \Big|_{\substack{C(x, t_i) \in \bar{\Omega}_c, \\ \varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon^* > 0}}. \quad (9)$$

Задача максимальной точности:

$$J_{\varepsilon}^{opt} = \min_{\varphi(\tau)} \max_{x \in [0, h_{cl}]} |C(x, t_i) - C^*(x)|, t_i \in (0, \infty). \quad (10)$$

Поставленные задачи представляют собой задачи оптимального управления с подвижным правым концом траектории в бесконечномерной негладкой области $\bar{\Omega}_c = \left\{ C(x, \tau) : \max_{x \in [0, h_{cl}]} |C(x, t_i) - C^*(x)| \leq \varepsilon \right\}$ допустимых результирующих состояний для заданной $\varepsilon = \varepsilon^*$ или предельно достижимой $\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(i)}$ точности в области допустимых управлений.

Решение этих задач альтернативным методом оптимизации (АМО) [3], определяет как оптимальное управление $v^0(\tau) = \varphi(\tau) \equiv \varphi(\Delta_n^{(i)}) \subset R^i$, $n = 1, 2, \dots, i$, $i = 1, 2, \dots, J$ в форме кусочно-постоянных функций времени с i интервалами $\Delta_n^{(i)}$ постоянства на уровне ограничений (7) (рис. 1)

$$v^0(\tau) = v_\tau^0(\tau) = \arg \min_{\varphi(\tau)} t_i \Big|_{\substack{C(x, t_i) \in \bar{\Omega}_c, \\ \varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon^* > 0}}; \quad v_\varepsilon^0(\tau) = v_\varepsilon^0(\tau) = \arg \min_{\varphi(\tau)} \max_{x \in [0, h_{cs}]} |C(x, t_i) - C^*(x)| \text{ для соответствующих}$$

оптимальных задач (9) и (10) соответственно, так и предельно достижимую в каждом i -том подмножестве управлений точность

$$\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(i)} = \max_{\varphi(\Delta_n^{(i)})} |C(x, t_i^{(i)}) - C^*(x)| \quad (11)$$

равномерного приближения результирующего профиля $C(x, t_i^{(i)})$ к заданному из условий удовлетворения эксплуатационным требованиям профилю концентраций $C^*(x)$.

Процедура АМО предполагает получение неизвестных параметров $\Delta_n^{(i)}$, $\varepsilon_{min}^{(i)}$ поставленных оптимальных задач (9), (10) путем решения вспомогательной определяющей системы трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} \theta(z, t_i^{(i)}) \Big|_{z=z_{kj}} = \pm \varepsilon_m \\ \frac{\partial \theta(z, t_i^{(i)})}{\partial z} \Big|_{z=z_{\alpha j}} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

в относительных единицах $\theta(z, t_i^{(i)}) = (C(x, t_i^{(i)}) - C^*(x)) / (\varphi_{max} - C_0)$; $z = x/h$; $\varepsilon_m = \varepsilon / (\varphi_{max} - C_0)$. Здесь $z_{\alpha j}$ - точки экстремума функции $\theta(z, t_i^{(i)})$; $z_2 = 1, h_{cs}$ - граничные точки функции $\theta(z, t_i^{(i)})$; $i = 1, 2, \dots, J$; $S = i$ при $\varepsilon_{min}^{(i-1)} \geq \varepsilon = \varepsilon^* \geq \varepsilon_{min}^{(i)}$; $S = i + 1$ при $\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(i)}$; $z_{kj} = z_{\alpha j} \cup z_2$; $t_i^{(i)} = \sum_{n=1}^i \Delta_n^{(i)}$.

При этом наименьшая точность $\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(1)}$ достигается на подмножестве одноинтервальных управлений $i = 1$, а наибольшая точность $\varepsilon = \varepsilon_{min}^{(J)} = \varepsilon_{inf} \geq 0$ обычно достигается на подмножестве достаточно большого количества интервалов $i = J$. Таким образом, решением последовательности задач максимальной точности (9) формируется ряд неравенств

$$\varepsilon_{min}^{(1)} < \varepsilon_{min}^{(2)} < \dots < \varepsilon_{min}^{(i)} < \dots < \varepsilon_{min}^{(J)} = \varepsilon_{inf} \geq 0. \quad (13)$$

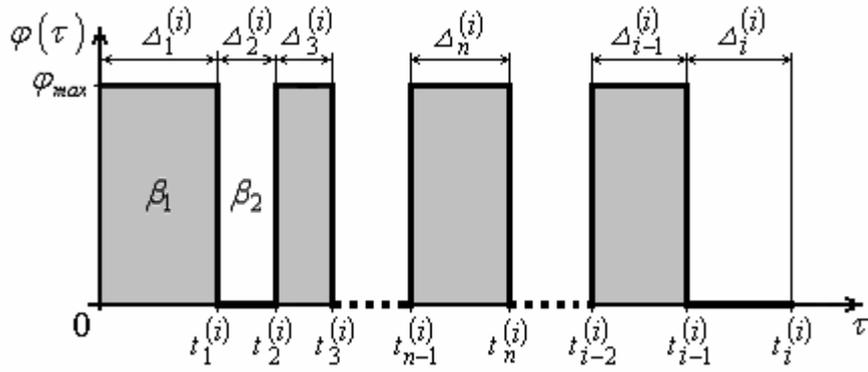
Очевидно, для решения определяющей системы (12) необходимо получить прямое решение краевой задачи (2)-(5) относительно $C(x, \tau)$ для управления в форме (см. рис. 1):

$$v^0(\tau) = \varphi(\tau) = \varphi(\Delta_n^{(i)}) = \begin{cases} \varphi_{max}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots, i. \quad (14)$$

Решение (2)-(5) для случая, когда управление $\varphi(\tau)$ представляет собой функцию Хевисайда $\varphi(\tau) = \varphi_{max} \cdot 1(\tau)$, имеет вид

$$C(x, \tau) = C_0 + (\varphi_{max} - C_0) \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{(2 \cdot \sqrt{D \cdot \tau})} \right) - e^{\frac{\beta}{D} \cdot x + \frac{\beta^2}{D} \cdot \tau} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{(2 \cdot \sqrt{D \cdot \tau})} + \beta \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{D}} \right) \right], \quad \tau \in [0, \infty). \quad (15)$$

При многоинтервальном управлении ($i > 1$) (рис. 1) получить решение операционным методом в компактном аналитическом виде не представляется возможным из-за сложного начального распределения углерода (15) для каждого из интервалов управления $\Delta_n^{(i)}$.



Р и с. 1. Управляющее воздействие $\varphi(\tau)$

В этом случае целесообразно воспользоваться методом функций Грина. Решение линейной неоднородной краевой задачи (2)–(5) с постоянными $\beta(\tau) = \beta_1 = const$ и $D(C) = D = const$ известно [4] и имеет вид

$$C(x, \tau) = \int_0^{\infty} f_n(\xi) \cdot G(x, \xi, \tau) d\xi - D \cdot \int_0^{\tau} g(\tilde{\tau}) \cdot G(x, 0, \tau - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, \quad n = 1, 2, \dots, i, \quad (16)$$

где $f_n(\xi) = C(\xi, \tau)|_{\tau=t_n^{(i)}}|_{x=\xi}$ - известное распределение в момент переключения $\tau = t_n^{(i)}$ (рис. 1), где $n = 1, 2, \dots, i$ - номер интервала переключения; i - количество интервалов в выбранном i -том подмножестве управления; $\xi, \tilde{\tau}, \eta$ - промежуточные переменные, а функция Грина имеет вид

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D \tau}} \left\{ e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2}{4D\tau}\right]} + e^{-\left[\frac{(x+\xi)^2}{4D\tau}\right]} - 2 \frac{\beta}{D} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\left[\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4D\tau} - \frac{\beta \eta}{D}\right]} d\eta \right\}; \quad (17)$$

$$g(\tau) = -\beta/D \cdot \varphi(\tau). \quad (18)$$

Тогда в частном случае, например, для двухинтервального управления ($i = 2$), решение прямой краевой задачи (2)–(5) может быть получено по выражению свертки (16), если подставить в него

$$f(\xi) = C(\xi, \tau)|_{\tau=t_1^{(2)}} = C_0 + (\varphi_{max} - C_0) \cdot \left[\operatorname{erfc} \xi / \left(2 \cdot \sqrt{D \cdot t_1^{(2)}} \right) - e^{-\frac{\beta_1 \xi + \beta_2^2 t_1^{(2)}}{D}} \cdot \operatorname{erfc} \left(\xi / \left(2 \cdot \sqrt{D \cdot t_1^{(2)}} \right) + \beta_1 \cdot \sqrt{t_1^{(2)}} / \sqrt{D} \right) \right] \quad (19)$$

и выражение (17), где принять $\tau = t_2^{(2)}$.

При вычислении распределения углерода для двухинтервального управления ($i = 2$) следует учесть, что для второго интервала $\Delta_2^{(2)}$ (рис.1) управляющее воздействие $\varphi(\tau)|_{\tau=\Delta_2^{(2)}} = 0$, и тогда в (18) $g(\tau) = 0$. Свертка (16) для двухинтервального управления в этом случае вырождается:

$$C_{II}(x, \tau) = \int_0^{\infty} C(\xi, \tau)|_{\tau=t_1^{(2)}} \cdot G(x, \xi, \tau)|_{\tau=t_2^{(2)}} d\xi. \quad (20)$$

Для трехинтервального управления ($i = 3$) решение задачи (2)–(5) примет вид

$$C_{III}(x, \tau) = \int_0^{\infty} C_{II}(\mu, \tau) \cdot G(x, \mu, \tau)|_{\tau=t_3^{(3)}} d\mu - D \cdot \int_0^{\tau} g(\tilde{\tau}) \cdot G(x, 0, \tau - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, \quad (21)$$

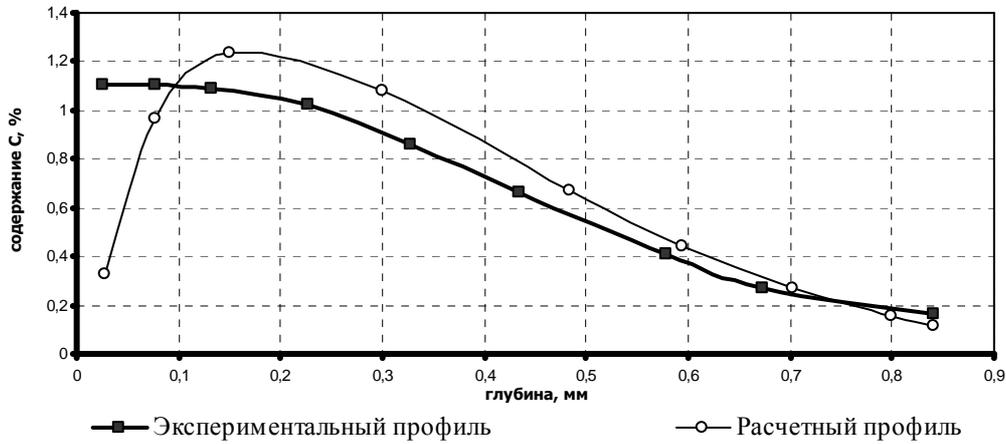
где, согласно (18), $g(\tau) = -\beta/D \cdot \varphi_{max}$.

Аналогично, аналитическое решение задачи для четырехинтервального управления ($i = 4$) имеет вид

$$C_{IV}(x, \tau) = \int_0^{\infty} C_{III}(\psi, \tau) \cdot G(x, \psi, \tau)|_{\tau=t_4^{(4)}} d\psi. \quad (22)$$

Для практического использования полученных с помощью вспомогательной системы (12) решений оптимальных задач (9), (10) необходимо идентифицировать параметры (коэффициенты диффузии D и массопереноса β) математической модели (2)–(5) по экспериментальным данным. В процедуре идентификации использован метод наименьших квадратов [6], с помощью которого определены значения β и D .

Результаты идентификации неизвестных постоянных коэффициентов массопереноса $\beta(\tau) = \beta_1 = const$ и диффузии $D = const$ приведены на рис. 2. На этом рисунке для углеродного потенциала $\varphi_{max} = 4.1 \%C$, определенного экспериментально с помощью метода фольговых проб [1], приведено сравнение расчетного и экспериментального профилей углерода для стали 14ХНЗМА.



Р и с. 2. Сравнение экспериментального и расчетного профилей концентрации углерода при $\beta = \beta_1 = 1.95 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}$, $D = 6.44 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi_{max} = 4.1 \%C$

Из рис. 2 видно, что рассогласование между экспериментальным и расчетным профилем составляет около 40%, что недопустимо.

Причина неудовлетворительной идентификации объясняется отличием физической картины вакуумной цементации в атмосфере ацетилена от типовой газовой цементации в смеси эндогаза и природного газа, связанным с механизмом массопереноса углерода из атмосферы на поверхность деталей. При газовой цементации характер процесса массопереноса углерода на поверхности детали не изменяется в зависимости от его стадии. Меняется лишь интенсивность потока углерода. При вакуумной цементации механизм массопереноса на стадии насыщения $n = 1,3,5,\dots$ и стадии диффузии $n = 2,4,6,\dots$ существенно различается [5].

На стадии насыщения происходит взаимодействие молекул ацетилена с поверхностью стали:

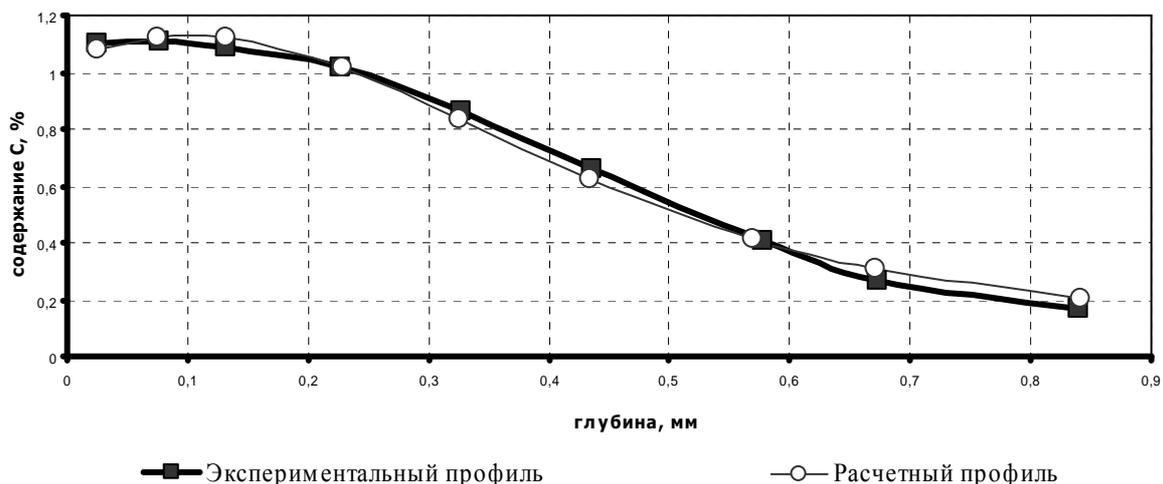


На стадии диффузии при вакуумной цементации отсутствует науглероживающая атмосфера, и углерод сублимирует с поверхности детали в вакуум. Механизм отвода углерода от поверхности в атмосферу при вакуумной и газовой цементациях существенно различается. Поэтому при идентификации технологических режимов вакуумной цементации следует использовать не одинаковые, как принято в газовой цементации, а различные значения коэффициентов для четных $\beta(\tau) = \beta_2|_{n=2,4,6,\dots}$ и нечетных $\beta(\tau) = \beta_1|_{n=1,3,5,\dots}$ интервалов управления $v^0(A_n^{(i)})$ (14) вследствие различных условий массообмена на поверхности на этапах насыщения и диффузии:

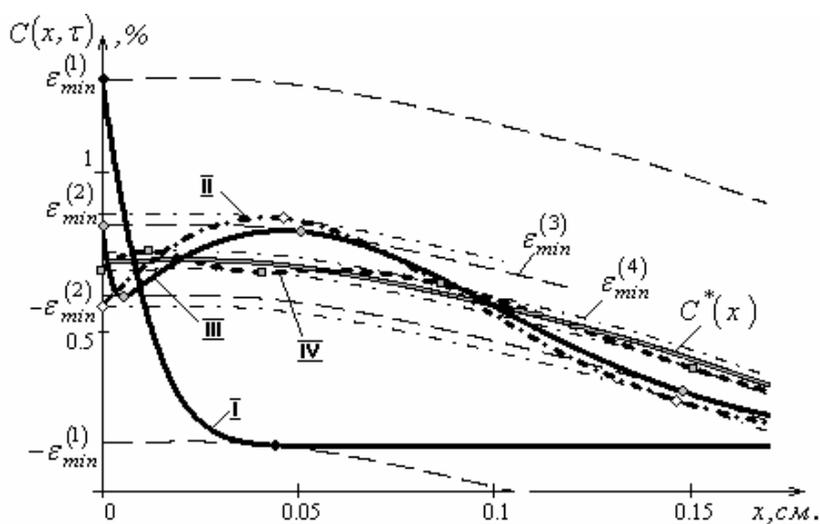
$$\beta(\tau) = \begin{cases} \beta_1, \tau \in (t_n^{(i)}, t_{n+1}^{(i)}), \text{ при } n = 0, 2, 4, \dots \\ \beta_2, \tau \in (t_n^{(i)}, t_{n+1}^{(i)}), \text{ при } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (24)$$

Идентификация по методу наименьших квадратов в условиях (24) с различными коэффициентами массопереноса для стали 14ХНЗМА обеспечивает точность не хуже 5% по оценке (8) (рис. 3).

Для реальной промышленной технологии вакуумной цементации шарошек буровых долот решены поставленные оптимальные задачи (9), (10) для модели (2)–(5) в условиях переменного коэффициента массопереноса β согласно (24). На рис. 4 приведены оптимальные по точности траектории для одно- ($i = 1$)-I, двух- ($i = 2$)-II, трех- ($i = 3$)-III и четырехинтервального ($i = 4$)-IV управления.



Р и с. 3. Сравнение экспериментального и расчетного профилей распределения углерода при различных коэффициентах массопереноса ($\beta_1 = 2.22 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}$, $\beta_2 = 6.94 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}$, $D = 6.19 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi_{\max} = 4.1 \% \text{ C}$)



Р и с. 4. Оптимальные траектории процесса вакуумной цементации

Оптимальное управление процессом вакуумной цементации

Интервалы управления	Продолжительность интервалов оптимального управления $\Delta_n^{(i)}$, сек	Предельная точность $\varepsilon_{\min}^{(i)}$, %C	Минимальное время процесса $t_i^{(i)} = \sum_{n=1}^i \Delta_n^{(i)}$, сек
Одноинтервальное ($i = 1$)	$\Delta_1^1 = 111$	$\varepsilon_{\min}^{(1)} = 0.547$	$t_1^{(1)} = 111$
Двухинтервальное ($i = 2$)	$\Delta_1^2 = 2734, \Delta_2^2 = 2234$	$\varepsilon_{\min}^{(2)} = 0.104$	$t_2^{(2)} = 4968$
Трехинтервальное ($i = 3$)	$\Delta_1^3 = 2910, \Delta_2^3 = 2381, \Delta_3^3 = 11,4$	$\varepsilon_{\min}^{(3)} = 0.088$	$t_3^{(3)} = 5302$
Четырехинтервальное ($i = 4$)	$\Delta_1^4 = 3333, \Delta_2^4 = 3524, \Delta_3^4 = 103, \Delta_4^4 = 183$	$\varepsilon_{\min}^{(4)} = 0.0286$	$t_4^{(4)} = 7143$

В таблице приведены характеристики оптимального по точности управления процессом вакуумной цементации шарошек буровых долот диаметром $d = 215.9 \text{ мм}$ в печи марки VUT – (LCP). По сравнению с известной технологией предложенный оптимальный алгоритм обеспечивает 13% повышения производительности установки при увеличении точности управления на 5.8%.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лахтин Ю.М., Арзамасов Б.Н.* Химико-термическая обработка металлов. М.: Металлургия, 1985. 216 с.
2. *Лившиц М.Ю.* Критерии оптимизации процессов технологической теплофизики // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. междунар. конф. Самара: Самарский научный центр РАН. 1999. С. 212-217.
3. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
4. *Дилигенский Н.В., Темников А.В., Девяткин А.Б., Слесаренко А.П.* Современные методы математического моделирования теплопроводности в теплоэнергетике и машиностроении // Самара: СамГТУ, 1995. С. 45-54.
5. *Рыжов Н.М., Смирнов А.Е., Фахрутдинов Р.С., Мулякаев Л.М., Громов В.И.* Особенности вакуумной цементации теплостойкой стали в ацетилене // МиТОМ. 2004. №6. С. 10-15.
6. *Бахвалов Н.С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975.

Статья поступила в редакцию 26 января 2007 г.

УДК 621.785-669.2

Ю.Э. Плешивецва

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫМИ РЕЖИМАМИ НАГРЕВА МЕТАЛЛА В ИНДУКЦИОННЫХ ПЕЧАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЗАГОТОВОК*

Индукционные нагревательные установки непрерывного действия широко применяются в ведущих отраслях промышленности. Основным показателем качества работы проходной индукционной печи в установившемся режиме является точность достижения заданного конечного температурного состояния нагреваемого изделия. В данной работе рассматриваются типовые задачи оптимального управления проходными нагревателями и методика их решения с помощью альтернативного метода параметрической оптимизации. Исследуется решение задачи оптимального управления по напряжениям питания индукторов нагревателя.

Введение

Альтернативный метод параметрической оптимизации [1, 2] может быть распространен на задачи оптимального управления стационарными режимами работы проходных индукционных нагревательных установок (ИНУ) с непрерывной или дискретной выдачей заготовок, которые достаточно широко применяются в различных отраслях промышленности.

Основной особенностью управляющих воздействий в этих задачах применительно к движению потока нагреваемого материала с постоянной скоростью является их неизменность во времени. Такие управляющие воздействия, по существу, представляют собой проектные решения ИНУ, реализуемые на объекте до начала его функционирования и не меняющиеся в процессе его работы. Эти решения зависят от конструктивного исполнения ИНУ, конкретного набора используемых воздействий и характера движения заготовок через индуктор.

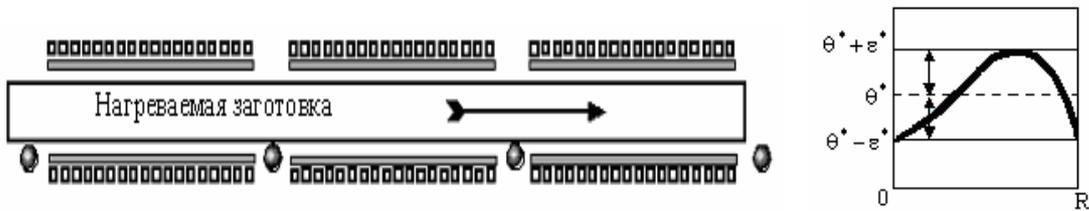
В данной работе изучаются типовые задачи оптимизации стационарных процессов непрерывного нагрева. Задача оптимального управления по напряжениям питания индукторов решается применительно к численной нелинейной модели температурных полей.

Описание ИНУ непрерывного действия как объекта управления

Рассмотрим ИНУ непрерывного действия с постоянной скоростью V перемещения заготовок в индукторе длиной y^0 . Как правило, V заранее фиксируется требуемой производительностью технологического комплекса «нагрев – обработка давлением».

«Холодные» заготовки поступают в печь с некоторой начальной температурой и нагреваются до требуемой температуры по мере продвижения к выходу нагревателя.

* Работа поддержана грантом РФФИ (проект 06-08-00041-а)



Р и с. 1. ИНУ непрерывного действия и качественное распределение температуры в поперечном сечении заготовки на выходе

Основная задача ИНУ в технологическом комплексе «нагрев – обработка давлением» сводится к обеспечению заданных температурных кондиций нагреваемых заготовок перед последующими стадиями технологического процесса (прокатка, прессование, штамповка, резка и т.д.). Согласно типовым технологическим требованиям, ИНУ должна обеспечить достижение заданного (как правило, равномерного) температурного распределения на выходе нагревателя с определенной допустимой неравномерностью по объёму заготовки. Для оценки отклонения от заданного температурного распределения чаще всего используется максимально допустимая величина ε^* абсолютного отклонения $\theta(l, y^0)$ от θ^* в пределах всего объёма нагреваемого тела:

$$\max_{l \in [0, R]} |\theta(l, y^0) - \theta^*| \leq \varepsilon^*, \quad (1)$$

где $\theta(l, y^0)$ - температурное распределение в поперечном сечении заготовки на выходе из нагревателя, работающего в стационарном режиме (рис. 1); R – характерный размер заготовки.

Установившиеся режимы работы ИНУ непрерывного действия моделируются неизменными во времени распределениями температуры по радиальной и осевой координатам.

Требуемые температурные кондиции заготовок в ИНУ могут быть получены путем обеспечения соответствующего распределения мощности внутренних источников тепла по длине нагревателя. Во многих случаях для типовых схем загрузки нагреваемых изделий в цилиндрическом индукторе можно записать функцию пространственного распределения электромагнитных источников тепла в виде

$$W(\xi, l, y) = W_1(\xi, l)u(y). \quad (2)$$

Здесь функция $W_1(\xi, l)$ описывает изменение интенсивности внутреннего тепловыделения по радиусу заготовки в зависимости от частоты питающего тока, а $u(y)$ - распределение удельной мощности нагрева по длине индуктора, которое остается в распоряжении проектировщика и может рассматриваться в качестве пространственного управляющего воздействия. Применительно к стационарным процессам непрерывного нагрева существуют различные реализуемые способы управления характером распределения мощности тепловыделения по направлению движения заготовок. К ним, в первую очередь, относится многосекционное исполнение индуктора. В этом случае выбор различных мощностей для разных секций, а также их числа и размеров, позволяет добиться кусочно-постоянного характера зависимости с приблизительно постоянным значением мощности в пределах каждой секции и ступенчатым её изменением от секции к секции. В определенной степени такой вид зависимости $u(y)$ корректируется наличием межсекционных промежутков и связанных с ними краевых эффектов. Кроме того, могут применяться такие специальные способы регулирования распределения мощности нагрева по длине индуктора, как намотка витков с переменным шагом, применение специальных схем питания ИНУ и др.

Основной особенностью рассматриваемых управляющих воздействий является их неизменность во времени. При этом в задачах оптимизации ИНУ заданного конструктивного исполнения такое управление производится только путем выбора напряжений (мощности нагрева) для отдельных секций. В задачах оптимального проектирования ИНУ в роли оптимизируемых параметров дополнительно могут рассматриваться и такие элементы проектных решений, как число и размеры секций нагревателя.

Ограничения на пространственное управление $u(y)$ в ИНУ непрерывного действия задаётся, если для проектируемого нагревателя устанавливается по предварительным технико-экономическим соображениям величина U_{\max} максимальной мощности нагрева по всей длине нагревателя:

$$0 \leq u(y) \leq U_{\max}, \quad 0 < y \leq y^0. \quad (3)$$

Технологические ограничения на поведение температурного поля в процессе нагрева сводятся к ограничению максимального значения температуры по всему объёму нагреваемых заготовок на всём протяжении

нии процесса нагрева некоторой заданной предельно допустимой величиной θ_{don} . Превышение этой величины приводит к необратимым нежелательным изменениям структурных свойств материала обрабатываемых изделий и (или) к их оплавлению.

Данное условие должно выполняться во всех поперечных сечениях заготовки по всей длине индуктора:

$$\theta_{\max}(y) = \max_{l \in [0, R]} \theta(l, y) \leq \theta_{don}, \quad 0 \leq y \leq y^0. \quad (4)$$

Общая характеристика типовых задач оптимизации и методов их решения

Применительно к установившимся режимам работы ИНУ экономическими критериями качества являются либо производительность ИНУ, либо себестоимость процесса нагрева. В первом случае задача оптимизации сводится либо к минимизации длины нагревателя y^0 при заданной скорости V движения заготовок, либо к обеспечению максимума скорости V (максимума производительности нагревателя) при заданном y^0 . Во втором случае задача оптимального управления состоит в минимизации себестоимости конечной продукции, и тогда в роли критерия оптимальности могут выступать различные показатели, такие как точность нагрева, энергетические и материальные затраты.

Базовой задачей оптимального по быстрдействию управления для ИНУ непрерывного действия является задача обеспечения заданной точности нагрева на выходе индуктора минимально возможной длины в условиях принятых ограничений. Таким образом, основная задача на минимум времени нагрева заготовки до требуемой температуры с заданной точностью сводится в данном случае к проектированию индуктора минимальной длины.

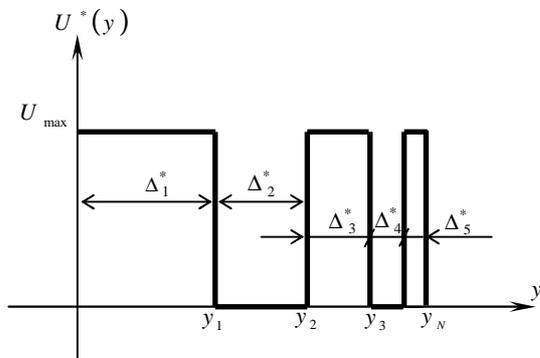
Можно строго доказать [1], что применительно к базовой одномерной модели температурного поля оптимальное по этому критерию распределение мощности нагрева по длине индуктора $u^*\left(\frac{y}{V}\right)$, рассматриваемое в качестве управляющего воздействия, принимает вид кусочно-постоянной функции (рис. 2):

$$u^*\left(\frac{y}{V}\right) = \frac{U_{\max}}{2} [1 + (-1)^{j+1}], \quad \frac{y_{j-1}}{V} < \frac{y}{V} < \frac{y_j}{V}; \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

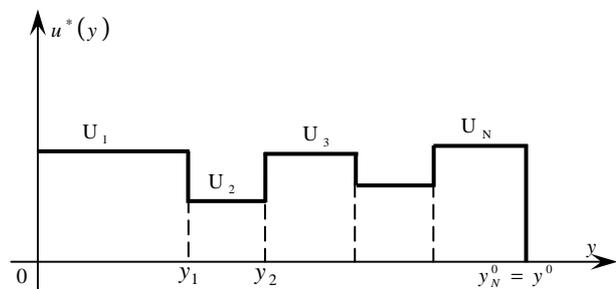
т.е. это распределение представляет собой чередующиеся по длине нагревателя участки с максимальной мощностью источников тепла и их отсутствием протяженностью $\Delta_i^*, i = \overline{1, N}$.

В итоге u^* задается с точностью до числа N и значений параметров Δ_i^* , по существу, являющихся длинами соответствующих секций ИНУ. При этом сама задача минимизации длины индуктора трансформируется к задаче математического программирования вида

$$\left\{ \begin{aligned} I\left(\frac{\Delta^*}{V}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i^*}{V} \rightarrow \min; \\ \Phi\left(\frac{\Delta^*}{V}\right) = \max_{l \in [0, 1]} \left| \theta\left(l, \frac{\Delta^*}{V}\right) - \theta^* \right| \leq \varepsilon. \end{aligned} \right. \quad (6)$$



Р и с. 2. Оптимальное распределение мощности нагрева по длине ИНУ



Р и с. 3. Распределение мощности нагрева по длине многосекционного проходного нагревателя

Задача на максимум точности нагрева заготовки до требуемой температуры на выходе из индуктора заданной длины может быть сформулирована в виде

$$\left\{ I(\Delta) = \max_{l \in [0, 1]} \left| \theta \left(l, \frac{\Delta^*}{V} \right) - \theta^* \right| \rightarrow \min; \sum_{i=1}^N \Delta_i^* = y^0. \right. \quad (7)$$

Решение данной задачи известно, можно доказать [1-2], что оно опять сводится к задаче быстрогодействия, если длина индуктора не превышает минимальную ее величину, необходимую для достижения предельной точности нагрева ϵ_{inf} . В достаточно редко встречающихся случаях, когда последнее условие не выполняется, задача на максимум точности имеет бесконечное множество различных решений.

Итак, если в качестве управляющих воздействий рассматривается пространственное распределение мощности источников тепла, то типичные задачи оптимизации стационарных процессов непрерывного нагрева на минимум длины индуктора при заданной точности нагрева или на максимум точности при заданных размерах нагревателя уже имеют готовые решения применительно к базовой одномерной модели объекта.

Однако эта модель получена при целом ряде упрощающих допущений. В частности, она не учитывает передачу тепла теплопроводностью в осевом направлении. Повышение требований к точности моделирования температурных полей часто приводит к необходимости их описания во всяком случае двумерными уравнениями теплопроводности. Такие модели описывают неизменные во времени распределения температуры по радиальной и осевой координатам в установившихся режимах работы ИНУ непрерывного действия.

Во многих ситуациях адекватное реальным объектам описание температурных полей требует дальнейшего усложнения моделей объекта управления.

В частности, при нагреве ферромагнитных заготовок уравнения теплопроводности становятся нелинейными за счет ярко выраженных температурных зависимостей электромагнитных и теплофизических характеристик нагреваемого материала.

Можно показать [1], что переход к более сложным моделям оптимизируемых процессов во всех практически встречающихся ситуациях не меняет характера оптимального управления по пространственному распределению мощности нагрева, которое по-прежнему сохраняет вид (5). С усложнением моделей остаются неизменными и базовые свойства результирующих температурных состояний нагреваемой заготовки на выходе из индуктора. При этом сохраняется и отвечающая оптимальному процессу форма кривой радиального распределения температуры на выходе индуктора, а вместе с ней и расчетные системы уравнений альтернансного метода. Вся специфика в таких условиях сводится лишь к различию математических моделей, определяющих зависимость результирующего температурного поля от пространственных координат и искомых параметров оптимального процесса. Эти модели могут быть получены различными способами и представляют собой как аналитические, так и численные решения используемых уравнений теплопроводности.

Другим характерным управляющим воздействием в ИНУ непрерывного действия являются напряжения питания U_1, U_2, \dots, U_N индукторов отдельных секций, которые и выполняют роль искомых параметров $\Delta_i^*, i = \overline{1, N}$. При этом число N и размеры этих секций заранее определены заданным конструктивным исполнением ИНУ.

В условиях фиксированной длины нагревателя типовая задача оптимизации по критерию максимальной точности нагрева принимает здесь вид

$$I(U) = \max_{l \in [0, 1]} \left| \theta(l, U) - \theta^* \right| \rightarrow \min_U, \quad (8)$$

где $U = (U_1, U_2, \dots, U_N)$, U_1, U_2, \dots, U_N – напряжения питания индукторов, являющиеся искомыми параметрами вместо $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_N^*$ в (6).

Опыт решения конкретных задач [1] опять свидетельствует о том, что независимо от уровня сложности используемых описаний температурного поля оптимальная форма кривой распределения температуры в поперечном сечении заготовки на выходе из индуктора и расчетные системы уравнений и здесь остаются аналогичными базовой задаче быстрогодействия. Это принципиальное обстоятельство позволяет распространить и на данный случай основную схему применения альтернансного метода для расчета оптимальных режимов нагрева заготовок при наличии соответствующих моделей, описывающих изменение температурного поля в зависимости от пространственных координат и напряжений $U_i, i = \overline{1, N}$.

Однако выбор в качестве управляющих воздействий напряжений на секциях заданной длины приводит к некоторым специфическим особенностям в технике применения этого метода [1-2]. По существу, сово-

купность оптимальных значений напряжений на N индукторах также реализует в ИНУ непрерывного действия пространственную развертку по направлению движения некоторой программы изменения во времени мощности нагрева заготовок. Эта программа отличается заведомо фиксируемыми числом и длительностями различных стадий процесса нагрева, управление которым возможно лишь путем изменения U_i .

При выборе в роли управляющего воздействия распределения мощности $u\left(\frac{y}{V}\right)$ по длине нагревателя картина получается в определенной степени «обратной»: здесь u^* согласно (5) принимает только фиксированные граничные значения, а управление процессом фактически сводится к выбору числа и длительностей чередующихся интервалов нагрева и выравнивания температур.

Сказанное приводит, в общем случае, к многопозиционному характеру « N -интервальных» оптимальных программ изменения мощности нагрева с управлением по напряжениям на секциях (рис. 3) при значениях $U_i^0, i = \overline{1, N}$, не совпадающих с допустимыми пределами, в противовес двухпозиционному управлению (5).

Содержательная интерпретация оптимального управления $(U_1^0, U_2^0, \dots, U_N^0)$ в качестве соответствующей программы изменения мощности нагрева во времени позволяет перейти от задачи (8) на максимум точности к эквивалентной задаче быстрогодействия (6).

Для решения этой задачи применим альтернативный метод [1], базирующийся на качественных универсальных свойствах оптимальных результирующих температурных полей. Эти свойства позволяют построить расчетные системы уравнений относительно неизвестных искомым параметров оптимального управления $\Delta = (\Delta_i, i = \overline{1, N})$.

Согласно альтернативному методу для рассматриваемой модели процесса нагрева число N интервалов постоянства u^* (Ф) однозначным образом определяется по заданному значению ε с помощью следующего правила:

$$N = S \text{ для всех } \varepsilon: \varepsilon_{\min}^{(S)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(S-1)}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{\min}^{(S)}$ - минимальное из возможных значений ε , достижимых в классе управляющих воздействий (4) с S интервалами постоянства (т.е. $\varepsilon_{\min}^{(S)}$ - максимальная точность нагрева (минимакс), достижимая в данном классе управлений). В данном случае число интервалов постоянства u^* (Ф) равно числу секций индуктора, а под каждым интервалом понимается фиксированная при $V = \text{const}$ длительность продвижения заготовки через соответствующую секцию.

Если $\varepsilon_{\min}^{(s)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(s-1)}$, то требуемое число секций, равное S , согласно (9), может не совпадать с действительным их числом N .

Если $N < S$, то заданная точность нагрева недостижима в ИНУ такого конструктивного исполнения. Однако подобная ситуация встречается очень редко, и типичным является случай обратного неравенства $N > S$ с избыточным числом секций индуктора. Очевидно, что этот избыток можно ликвидировать, подключая $N - S$ секций индуктора на одинаковое напряжение питания. При этом образуются S управляемых зон нагревателя, т.е. S «интервалов управления» с S искомыми параметрами U_1, U_2, \dots, U_s , в состав каждой из которых входит одна или несколько секций индуктора.

Итак, подобным образом можно охарактеризовать оптимальное управление в эквивалентной задаче быстрогодействия при заданной точности нагрева $\varepsilon = \varepsilon_0: \varepsilon_{\min}^{(s)} \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(s-1)}$, если $N \geq S$.

Это же управление обеспечивает максимальную точность $\varepsilon = \varepsilon_0$ на выходе из индуктора заданной длины \tilde{y}^0 , если $\tilde{y}^0 = y_{\min}^0(\varepsilon_0)$, где $y_{\min}^0(\varepsilon_0) = V\varphi_{\min}^0(\varepsilon_0)$. В случаях $\tilde{\varphi}^0 > \varphi_{\min}^0(\varepsilon_{\text{inf}})$, $\tilde{y}^0 > y_{\min}^0(\varepsilon_{\text{inf}})$ задача на максимум точности нагрева имеет, как и при управлении $u\left(\frac{y}{V}\right)$, бесконечное множество решений. При

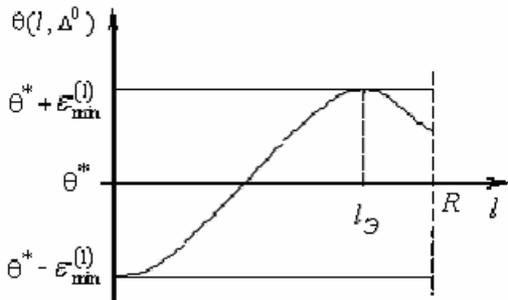
заранее заданной длине индуктора \tilde{y}^0 , числе N и размерах секций нагревателя мы в результате приходим к задаче вида (8), в которой предварительно необходимо выбрать число $S \leq N$ управляемых зон и способ их компоновки из N отдельных секций в условиях априори неизвестного соотношения между \tilde{y}^0 и $y_{\min}^0(\tilde{\varepsilon})$.

Подобную задачу можно свести к решению последовательности задач при $y^0 = \tilde{y}^0$ для возрастающего ряда фиксированных значений S начиная с $S = 1$. При этом величина $y_{\min}^0(\tilde{\varepsilon})$ вообще исключается из рассмот-

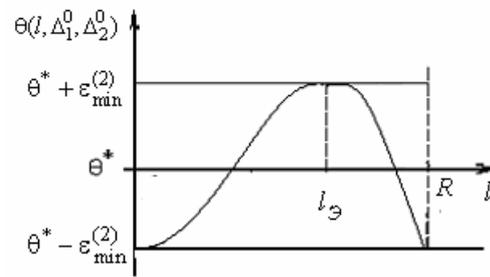
рения. При $S=1$ все секции подключаются на одно напряжение U_1 . При соответствующем «одноинтервальном» управлении форма кривой распределения температур по толщине заготовки оказывается подобной рис. 4, а расчетная система уравнений альтернансного метода принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \theta(0, U_1^0) - \theta^* = -\epsilon_{\min}^{(1)}; \\ \theta(l_3, U_1^0) - \theta^* = \epsilon_{\min}^{(1)}; \\ \frac{\partial \theta(l_3, U_1^0)}{\partial l} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решение этой системы определяет оптимальную величину U_1^0 и максимальную точность нагрева $\epsilon_{\min}^{(1)}$, достигаемую в таком классе управляющих воздействий. Если получаемая величина $\epsilon_{\min}^{(1)}$ оказывается удовлетворительной по предъявляемым технологическим требованиям, то исходную задачу можно считать решенной уже на этом шаге.



Р и с. 4. Температурное распределение по радиусу заготовки на выходе ИНУ при $\epsilon^* = \epsilon_{\min}^{(1)}$



Р и с. 5. Температурное распределение по радиусу заготовки на выходе ИНУ при $\epsilon^* = \epsilon_{\min}^{(2)}$

Если, в частности, задача оптимизации рассматривается для скорости V движения заготовок, меньшей проектной производительности ИНУ, то при той же длине индуктора оптимальное напряжение питания U_1^0 может снизиться до уровня, при котором точность нагрева $\epsilon_{\min}^{(1)}$ становится вполне приемлемой.

Подобная ситуация обычно отвечает неравенству $\tilde{y}^0 > y_{\min}^0(\epsilon_{\inf})$, когда длина индуктора превышает минимально необходимую для получения предельно достижимого значения $\epsilon = \epsilon_{\inf}$.

Если величина $\epsilon_{\min}^{(1)}$ не обеспечивает требуемую равномерность нагрева, следует перейти к варианту $S=2$, имея в виду неравенства

$$\epsilon_{\min}^{(1)} > \epsilon_{\min}^{(2)} > \dots > \epsilon_{\min}^{(N)} > \epsilon_{\min}^{(N+1)} > \dots > \epsilon_{\min}^{(N^*)} = \epsilon_{\inf} > 0. \quad (11)$$

При $N > 2$ здесь, в принципе, становятся возможными $N-1$ комбинаций компоновки двух управляемых зон из N отдельных секций.

Для каждой из таких комбинаций задача сводится к решению системы уравнений вида

$$\begin{cases} \theta(0, U_1^0, U_2^0) - \theta^* = -\epsilon_{\min}^{(2)}; & \theta(l_3, U_1^0, U_2^0) - \theta^* = \epsilon_{\min}^{(2)}; \\ \theta(1, U_1^0, U_2^0) - \theta^* = -\epsilon_{\min}^{(2)}; & \frac{\partial \theta(l_3, U_1^0, U_2^0)}{\partial l} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

при форме кривой распределения результирующей температуры, подобной рис. 5. Система уравнений (12) решается относительно оптимальных значений напряжений U_1^0, U_2^0 питания управляемых зон и соответствующего значения $\epsilon_{\min}^{(2)}$ максимальной точности нагрева.

Последующий перебор вариантов (например, с включением во вторую зону, ближайшую к выходу из индуктора, возрастающего от 1 до $N-1$ числа секций) позволяет принять в качестве окончательного решения с $S=2$ тот из них, при котором достигается минимальное из значений $\epsilon_{\min}^{(2)}$. Эта величина и представляет собой предельно достижимую точность нагрева в классе двухзонных управляющих воздействий.

Чаще всего она обеспечивает предъявляемые технологией требования. Тогда уже на данном этапе полученные результаты можно рассматривать в качестве решения исходной задачи оптимизации.

Если точность нагрева при $S = 2$ оказывается недостаточной, следует перейти к трехзонному управлению ($S = 3$) с последующим поиском оптимальных значений U_1^0, U_2^0, U_3^0 аналогичным способом. При этом следует иметь в виду, что при $N > S$ число комбинаций по компоновке управляемых зон может резко увеличиваться по сравнению с вариантом $S = 2$, и достигаемая при $S = 3$ точность нагрева $\epsilon_{\min}^{(s)}$ может совпадать с предельно достижимой величиной ϵ_{\inf} .

Ниже на основе полученных качественных результатов исследуется типичная задача оптимального управления напряжениями индукторов для нелинейной численной модели процесса непрерывного нагрева.

Решение задачи оптимизации процессов непрерывного нагрева с управлением по напряжениям питания индукторов нагревателя

Рассмотрим некоторые конкретные результаты исследования оптимальных по точности режимов работы промышленной ИНУ многосекционного исполнения, предназначенной для нагрева стальных заготовок до 1280°C .

Все расчеты выполнены с использованием комплексной электротепловой модели температурного поля ферромагнитной загрузки, разработанной в Институте электротермических процессов Ганновского университета [3]. Специализированный пакет прикладных программ осуществляет электрический расчет индуктора и моделирует изменение во времени радиального распределения температуры в поперечном сечении нагреваемого тела в зависимости от напряжений на отдельных секциях нагревателя. Развертка получаемых температурных кривых по длине ИНУ описывает стационарное температурное поле в процессе непрерывного нагрева.

При расчёте использовались следующие исходные данные: длина индуктора – 8,43 м; диаметр катушки – 0,273 м; номинальная производительность нагревателя – 7000 кг/ч; длина заготовки – 0,446 м; размер квадратного поперечного сечения – 0,17 м; начальная температура – 20°C [2, 4].

Оптимальные величины напряжений $U_i^0, i = \overline{1, N}$ находились по универсальной схеме альтернативного метода для типовых случаев одно- и двухзонного управления процессом нагрева ($S = 1$ и $S = 2$) с точностью $\epsilon_{\min}^{(1)}$ и $\epsilon_{\min}^{(2)}$ (рис. 4, 5).

Расчетные системы уравнений (10) и (12) для $S = 1$ и $S = 2$ решались относительно искомым неизвестных (включая величины минимаксов $\epsilon_{\min}^{(1)}$ и $\epsilon_{\min}^{(2)}$) с помощью стандартных итерационных процедур.

Значения результирующих температур в точках их максимального отклонения от θ^* определялись в соответствующих узлах пространственной сетки по цифровой модели температурного поля.



Р и с. 6. Зависимости минимакса $\epsilon_{\min}^{(2)}$ и максимального перегрева $\theta_{\max} - \theta^*$ от числа индукторов во второй секции при 100% производительности

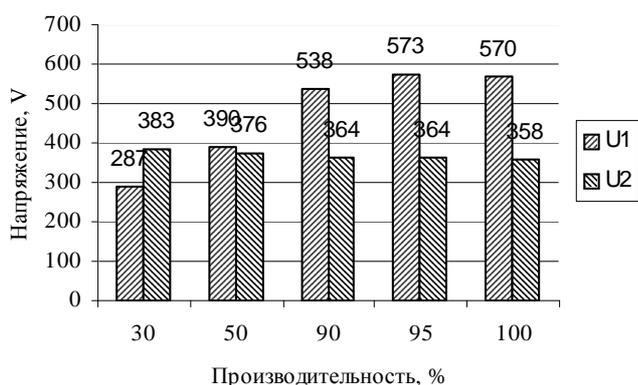


Р и с. 7. Зависимости минимакса $\epsilon_{\min}^{(2)}$ и максимального перегрева $\theta_{\max} - \theta^*$ от числа индукторов во второй секции при 30% производительности

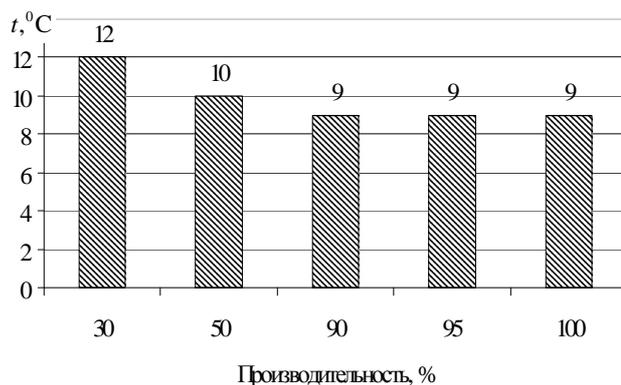
На основании выполненной серии расчетов проводились исследования зависимостей характеристик оптимальных режимов нагрева от распределения секций индуктора по управляемым зонам, производительности ИНУ и номенклатуры нагреваемых заготовок [2,4].

Рис. 6 иллюстрирует влияние числа секций, включаемых во вторую управляемую зону при $S = 2$, на величину минимакса $\epsilon_{\min}^{(2)}$ и максимальное превышение температуры в оптимальном процессе нагрева над

заданным конечным значением. Приведенные данные соответствуют 100% производительности ИНУ. Как видно, достигаемая точность практически не зависит от состава второй зоны, в то время как величина перегрева имеет явно выраженный минимум при ее формировании из четырех секций индуктора.



Р и с. 8. Оптимальные напряжения U_1^0 и U_2^0 в зависимости от производительности для случая 4-х индукторов во второй управляемой зоне

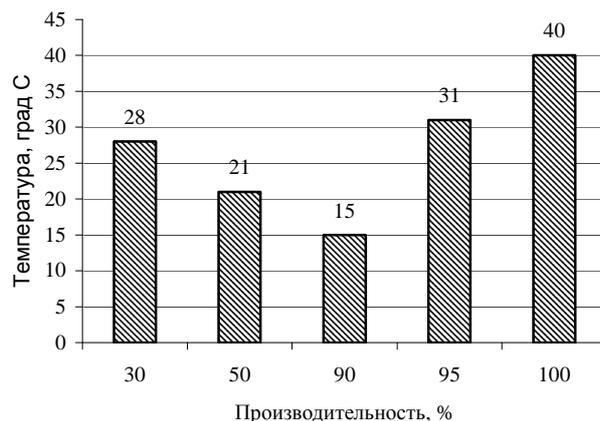


Р и с. 9. Минимум $\epsilon_{\min}^{(2)}$ в зависимости от производительности для случая 4-х индукторов во второй управляемой зоне

При снижении производительности ИНУ в два и более раз перегрев $\theta_{\max} - \theta^*$ и значение $\epsilon_{\min}^{(2)}$ практически не зависят от распределения секций ИНУ по зонам (рис. 7).

На рис. 8-10 показаны зависимости оптимальных значений напряжений питания индукторов U_1^0 и U_2^0 , минимакса $\epsilon_{\min}^{(2)}$ и превышения температуры $\theta_{\max} - \theta^*$ от производительности ИНУ при включении четырех секций в состав второй управляемой зоны.

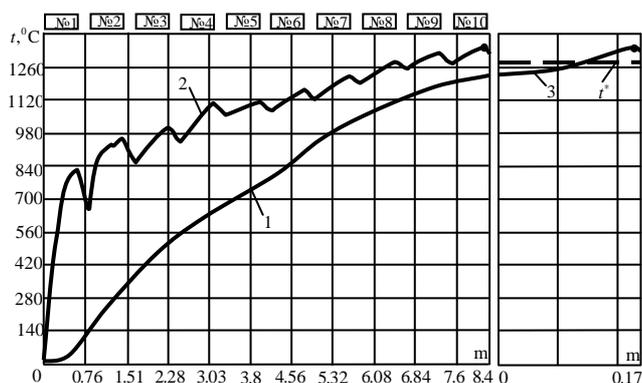
Как следует из приведенных данных, неравномерность нагрева не превышает 9-12°C и величина $\theta_{\max} - \theta^*$ составляет 15-40°C в широком диапазоне изменения скорости продвижения загрузки в индукторе, что обычно удовлетворяет типичным технологическим требованиям.



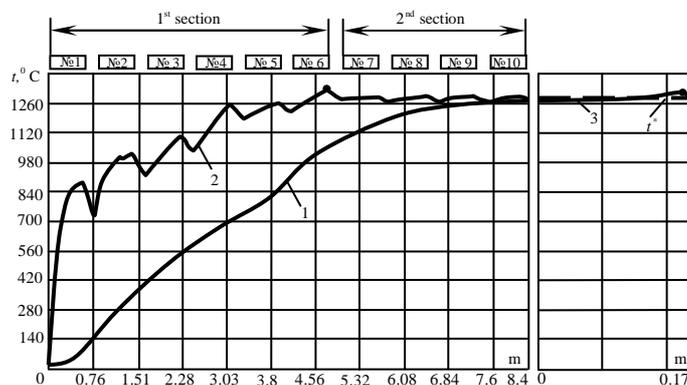
Р и с. 10. Зависимость максимального перегрева $\theta_{\max} - \theta^*$ от производительности для случая 4-х индукторов во второй управляемой зоне

При 50% производительности нагревателя разность $U_1^0 - U_2^0$ приближается к нулю. Фактически это означает переход в такой ситуации к однозонному управлению. Дальнейшее снижение производительности до 30% от номинальной приводит к изменению знака этой разности, что объясняется избыточной длиной нагревателя по сравнению с минимально необходимой при таких скоростях движения заготовок.

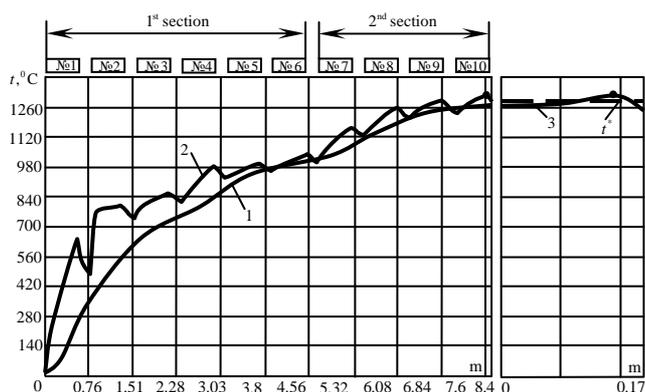
Указанные характеристики оптимальных режимов не претерпевают существенных изменений для всей номенклатуры нагреваемых материалов. Распределение температур поверхности и центра заготовки по длине нагревателя в оптимальном режиме его работы со 100% производительностью при одно- и двухзонном управлении ИНУ иллюстрируется рис. 11, а-б. Немонотонный характер поведения температуры поверхности объясняется нелинейными эффектами при переходе через точку Кюри и наличием межсекционных промежутков. Существенное сокращение температурных перепадов по сечению заготовки при снижении производительности до 30% от номинальной (рис. 11, в) является следствием перемены знака разности $U_1^0 - U_2^0$ по сравнению с данными, приведенными на рис. 8.



a



б



в

Р и с. 11. Температурное распределение по длине нагревателя в центре заготовки (1) и на поверхности (2); распределение температуры по радиусу заготовки на выходе печи (3)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ранопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металлов. М: Metallurgy, 1993. 278 с.
2. *E. Rapoport, Yu. Pleshivtseva.* Optimal control of induction heating processes. -DK6039, CRC Press/Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway, NW Suite, 300. Boca Raton, FL 33487 (USA), 2006. 349 p.
3. *Boergerding R., Muehlbauer A.* Numerical Calculation of Temperature Distribution and Scale Formation in Induction Heaters for Forging, International Seminar on Simulation and Identification of Electroheat Processes, June 17-19, Lodz, Poland, pp. 134-141.
4. *Yu. Pleshivtseva, E. Rapoport, A. Efimov, B. Nacke, A. Nikanorov, S. Galumin, Yu. Blinov.* Optimal Control of Induction Through Heating for Forging // Heating by Electromagnetic Sources HES-04, Padua, Italy, June 23-25, 2004, pp 97-105.

Статья поступила в редакцию 23 ноября 2006 г.

УДК 517.977.5

Э.Я. Ранопорт, Ю.А. Осипова*

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ СМЕНЫ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И НОМЕНКЛАТУРЫ ИНДУКЦИОННОЙ НАГРЕВАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ МЕТОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ПО КРИТЕРИЮ СУММАРНОЙ ПОТЕРИ ТЕМПА ВЫДАЧИ

Предлагается метод решения задачи оптимального управления по критерию минимизации суммарной потери темпа переходными режимами работы односекционной индукционной нагревательной установки (ИНУ) методического действия. Приводятся примеры, иллюстрирующие полученные результаты применительно к процессам смены производительности ИНУ и смены номенклатуры нагреваемых изделий.

Рассмотрим задачу минимизации суммарной потери темпа в ее характерных частных аспектах применительно к типовой конструкции нагревателей с общим управлением по напряжению на всем индукторе, одновременно воздействующим на всю загрузку нагревателя, исключая пространственное управление мощностью нагрева по длине установки и обладающим в связи с этим существенно ограниченными воз-

* Работа поддержана грантом РФФИ (проект 06-08-00041а)

возможностями. Ниже изучается типичная ситуация, при которой требуемой точности нагрева \mathcal{E}_0 в установившейся стадии работы ИНУ такого исполнения отвечает неизменное во времени напряжение на индукторе, реализующее первый интервал соответствующего алгоритма оптимального управления.

Тогда температурные перепады обычно не превышают допустимых значений и на протяжении переходных процессов при любом способе изменения управляющего воздействия с тем же ограничением на его максимальную величину, выбираемую из условия обеспечения требуемой неравномерности нагрева \mathcal{E}_0 в стационарном режиме или определяемую предельными возможностями источника питания.

В таком случае температурное поле каждой заготовки в нестационарном режиме работы ИНУ при нагреве в установке методического действия или в каждом сечении загрузки при непрерывном нагреве достаточно полно характеризуется в первом приближении соответствующим значением средней температуры. В качестве объекта управления будем рассматривать партию, состоящую из достаточно большого числа $B_1 > B$ одинаковых заготовок, где $B > 1$ - число заготовок, одновременно размещающихся в индукторе методического действия. Для линейных или кусочно-линейных моделей температурных полей с управляющим воздействием по мощности нагрева с учетом удовлетворительной аппроксимации их представления типовыми аperiодическими звеньями первого порядка получим следующее описание для средней температуры $\theta_n(\varphi)$ каждой n -ной заготовки [1]:

$$\theta_n(\varphi) = \theta_{nn} \cdot e^{-b_2(\varphi - \varphi_{nn})} + \int_{\varphi_{nn}}^{\varphi} b_1 b_2 e^{-b_2 \varphi} u(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\varphi \in [\varphi_{nn}, \varphi_{kn}], \quad n = \overline{1, B_1}.$$

Здесь $\varphi_{nn}, \varphi_{kn}$ - соответственно начальный и конечный моменты нагрева n -ной заготовки в процессе ее продвижения через индуктор, θ_{nn} - начальная температура нагреваемой заготовки, b_1 и b_2 - коэффициенты аппроксимации [1]. Значения $\varphi_{nn}, \varphi_{kn}$ связываются в пренебрежении временем загрузки и выгрузки соотношениями, учитывающими дискретный характер перемещения нагреваемых изделий и одновременность воздействия общего управления $u(\varphi)$ в любой момент времени сразу на все B заготовки, заполняющие методический нагреватель.

$$\varphi_{nn} = \begin{cases} 0, n = \overline{1, B}; \\ \varphi_{k(n-B)}, n > B; \end{cases} \quad \varphi_{kn} = \begin{cases} \varphi_{nn} + \sum_{m=1}^n \varphi_m^*, n = \overline{1, B}; \\ \varphi_{nn} + \sum_{m=n-B+1}^n \varphi_m^*, n > B; \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi_m^* = \varphi_{km} - \varphi_{k(m-1)}, \quad (3)$$

где φ_m^* - темп выдачи m -ной заготовки в рассматриваемом переходном процессе.

В качестве управляющих воздействий будем рассматривать кроме мощности нагрева $u(\varphi)$, стесненной ограничением

$$0 \leq u(\varphi) \leq u_{\max}, \quad u_{\max} \geq u_{\text{уст}}, \quad (4)$$

темпа выдачи φ_n^* , $n = \overline{1, B_1}$ нагретых изделий в переходном режиме, определяемый по (2), (3).

В характерных условиях запрета на выдачу из индуктора некондиционных по требуемой температуре изделий возникает типичная оптимальная задача на минимум суммарной потери темпа I_{cm} в неустановившейся стадии работы ИНУ относительно требуемой длительности шага $\varphi^* = \text{const}$ для стационарного процесса:

$$I_{\text{cm}} = \sum_{n=1}^{B_1} |\varphi_n^* - \varphi^*| \rightarrow \min. \quad (5)$$

Задачей оптимального управления является установление темпа выдачи φ_n^* , $n = \overline{1, B_1}$ и определение такого $u_{\text{онм}}(\varphi)$, которое обеспечивает в условиях (4) достижение заданной средней температуры $\theta_{\text{зад}}$ на выходе из нагревателя для всех B_1 заготовок рассматриваемой партии

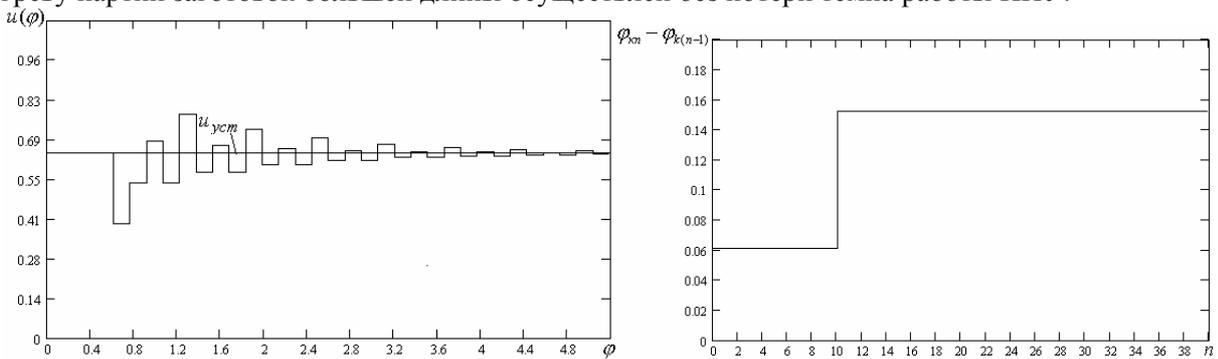
Оптимальное управление для данной задачи будет находиться по соотношениям (8), (9). При этом управлении выражение для начальной температуры n -ной заготовки θ_{nm}^l будет иметь следующий вид:

$$\theta_{nm}^l = \begin{cases} \int_{\varphi_{k(n-1)}}^{\varphi_{kn}} b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_2(\varphi_{k(n-1)} - \tau)} \cdot u_{n-1} \cdot d\tau, & \text{если } 0 < n \leq B; \\ \int_{\varphi_{k(n-1)}}^{\varphi_{kB}} b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_2(\varphi_{k(n-1)} - \tau)} \cdot u_{n-B} \cdot d\tau, & \text{если } n = B + 1; \\ \int_{\varphi_{k(l-1)}}^{\varphi_{kB}} b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_2(\varphi_{k(n-1)} - \tau)} \cdot u_{n-B} \cdot d\tau + \sum_{j=1}^{n-B-1} \int_{\varphi_{k(n-j-1)}}^{\varphi_{k(n-j)}} b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_2(\varphi_{k(n-1)} - \tau)} \cdot u_{n-j} \cdot d\tau, & \text{если } B + 1 < n \leq B + B_2; \\ \sum_{j=1}^{B_2-1} \int_{\varphi_{k(n-j-1)}}^{\varphi_{k(n-j)}} b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_2(\varphi_{k(n-1)} - \tau)} \cdot u_{n-j} \cdot d\tau, & \text{если } n > B_2. \end{cases} \quad (10)$$

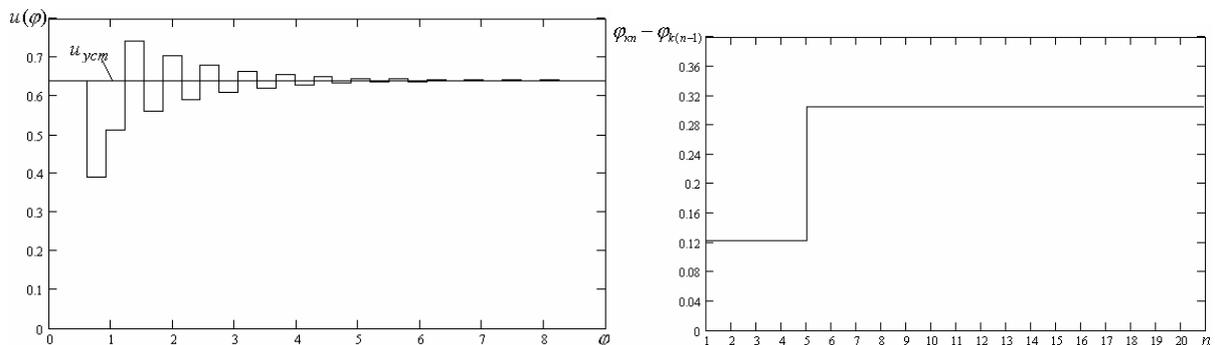
Здесь B_1 и B_2 - соответственно числа заготовок первой и второй партии, одновременно размещающихся в индукторе в установившемся режиме работы нагревателя, l - номер шага, на котором n -ная заготовка вошла в индуктор.

На рис. 2, 3 представлены кривые оптимального управления $u(\varphi)$ и потери темпа $\varphi_{kn} - \varphi_{k(n-1)}$ для режима смены длины нагреваемых цилиндрических заготовок по критерию минимизации потери темпа при переходе соответственно от десяти заготовок, одновременно размещаемых в индукторе, к четырем и от пяти заготовок - к двум.

Как видно из рис. 2, 3, оптимальное управление сходится к установившемуся значению, а сам переход к нагреву партии заготовок большей длины осуществлен без потери темпа работы ИНУ.



Р и с. 2. Расчетные характеристики процесса оптимального управления режимом смены номенклатуры нагреваемых изделий ($b_1 = 2.4$, $b_2 = 0.784$, $\theta_{зад} = 0.584$ до переходного режима $B=10$, $\varphi^* = 0.061$, после - $B_2 = 4$, $\varphi^* = 0.153$)



Р и с. 3. Расчетные характеристики процесса оптимального управления режимом смены номенклатуры нагреваемых изделий ($b_1 = 2.4$, $b_2 = 0.784$, $\theta_{зад} = 0.584$ до переходного режима $B=5$, $\varphi^* = 0.122$, после - $B_2 = 2$, $\varphi^* = 0.305$).

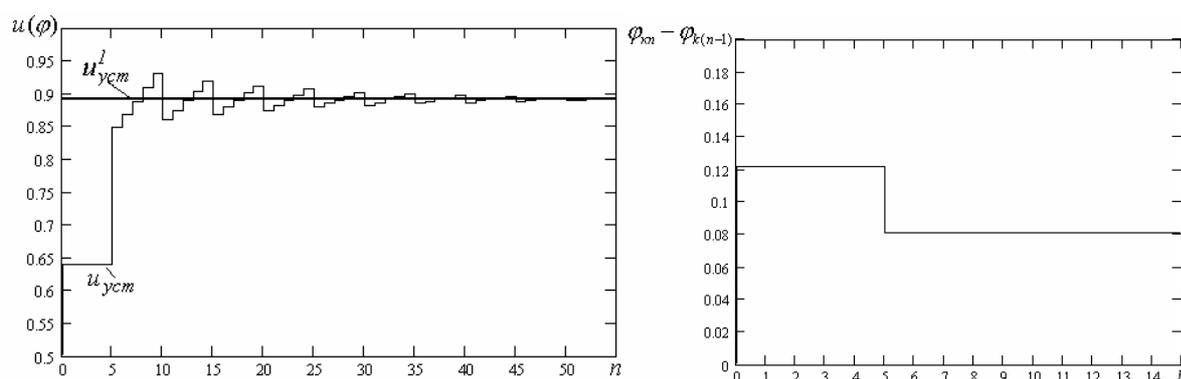
Рассмотрим задачу оптимального управления режимом смены производительности ИНУ на примере увеличения производительности ИНУ в полтора раза. Как и в предыдущей задаче, оптимальное управление

для данной задачи будет находиться по соотношениям (8), (9). При этом выражения для начальной температуры n -ной заготовки θ_{nn}^I и для заданного темпа выдачи будут иметь следующий вид:

$$\theta_{nn}^I = \begin{cases} \int_{\Phi_{nn}}^{\Phi_{k(n-1)}} b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_2(\Phi_{k(n-1)} - \tau)} \cdot u_{n-1} \cdot d\tau, & \text{если } 0 < n \leq B; \\ \sum_{j=1}^{B-1} \int_{\Phi_{k(n-j)}}^{\Phi_{k(n-1)}} b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_2(\Phi_{k(n-1)} - \tau)} \cdot u_{n-j} \cdot d\tau, & \text{если } n > B; \end{cases} \quad \Phi^* = \begin{cases} \Phi_1^*, & \text{если } n \leq B; \\ \Phi_2^*, & \text{если } n > B, \end{cases} \quad (11)$$

где Φ_1^* и Φ_2^* – заданные темпы выдачи соответственно до и после увеличения производительности.

На рис. 4 представлены кривые оптимального управления $u(\varphi)$ и потери темпа $\varphi_{kn} - \varphi_{k(n-1)}$ для режима увеличения в 1,5 раза производительности работы ИНУ по критерию минимизации потери темпа.



Р и с. 4. Расчетные характеристики процесса оптимального управления режимом смены производительности ИНУ ($b_1 = 2.4$, $b_2 = 0.784$, $\theta_{зад} = 0.584$, до переходного режима $u_{уст} = 0.64$, $\Phi^* = 0.122$, после – $u_{уст} = 0.891$, $\Phi^* = 0.081$).

Как и в предыдущем случае, оптимальное управление сходится к установившемуся значению, а само увеличение производительности осуществлено без потери темпа работы ИНУ (рис. 4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 279 с.
2. Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э., Осипова Ю.А. Локально-оптимальные алгоритмы управления переходными режимами работы индукционных нагревательных установок непрерывного действия // Мехатроника, автоматизация, управление 2005. Тр. II Всероссийск. науч.-техн. конф. Уфа: УГАТУ, 2005. Т.1. С. 65-70.

Статья поступила в редакцию 7 декабря 2006 г.

УДК 536.24

А.А. Узенгер

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗОВОЙ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ПЕЧИ ДЛЯ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

В настоящее время актуальна задача изучения динамических свойств технологических объектов управления. В данной работе в известной мере эта задача решается для широко распространенных в промышленности газовых отражательных печей. В статье используются методы теории систем с распределенными параметрами для представления распределенных передаточных функций, связывающих тепловые потоки и соответствующие температурные поля.

Представляя в первом приближении газовую печь как систему, которая состоит из однородной излучающей среды (газ), окруженной двумя замкнутыми лучевоспринимающими поверхностями (кладка и металл), можно получить уравнения лучистого теплообмена в виде [1]

$$q_K = \sigma_0 \varepsilon_1 (T_G^4 - T_K^4) - \sigma_0 \varepsilon_2 (T_K^4 - T_M^4), \quad (1)$$

$$q_M = \sigma_0 \varepsilon_3 (T_T^4 - T_M^4) + \sigma_0 \varepsilon_4 (T_K^4 - T_M^4), \quad (2)$$

где q_K, q_M - соответственно тепловые потоки на кладку и нагреваемое тело;

T_T, T_K, T_M - соответственно абсолютные среднеэффективные температуры излучающей среды, внутренней поверхности кладки и нагреваемой металлической поверхности;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ - соответственно степени черноты системы «газ – кладка – металл», являющиеся известными функциями ее теплофизических и конструктивных параметров.

В (1) и (2) T_T представляет собой некоторую фиктивную приведенную температуру излучателя, выбираемую из условия обеспечения в любой момент времени действительного температурного напора θ в печи. При этом, как показано в [1], T_T в первом приближении может быть найдена из выражения

$$T_T^4 = \frac{\varepsilon_1 T_K^4 + \omega \varepsilon_3 T_M^4}{\varepsilon_1 + \omega \varepsilon_3} + \theta \left(T_T^4 - \frac{\varepsilon_1 T_K^4 + \omega \varepsilon_3 T_M^4}{\varepsilon_1 + \omega \varepsilon_3} \right), \quad (3)$$

где $\frac{1}{\omega}$ - степень развития кладки; T_T - теоретическая температура сгорания топлива.

В свою очередь, θ является достаточно сложной функцией расхода газа Q и температур T_K и T_M [1]. Отсюда следует, что T_T в (1) и (2) нелинейным образом зависит от Q, T_K и T_M .

Пользуясь условием малости отклонений параметров от равновесного состояния в нормально функционирующей автоматической системе стабилизации, линеаризуем (1), (2) и (3) по Тейлору. Из полученных выражений вычтем уравнения статики. Далее, применив преобразование Лапласа, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \tilde{T}_T(p) = K_1 \tilde{T}_K(p) + K_2 \tilde{T}_M(p) + K_3 \tilde{Q}(p); \\ \tilde{q}_K(p) = K_4 \tilde{T}_T(p) - K_5 \tilde{T}_K(p) + K_6 \tilde{T}_M(p); \\ \tilde{q}_M(p) = K_7 \tilde{T}_T(p) + K_8 \tilde{T}_K(p) - K_9 \tilde{T}_M(p); \end{cases} \quad (4)$$

где p - комплексная переменная Лапласа.

Методика определения параметров статического режима, требуемых для вычисления коэффициентов $K_1 \div K_9$, дана в [1]. Система выражений (4) позволяют представить структурную схему объекта в виде рис. 1. Здесь коэффициенты $K_1 \div K_9$ представлены выражениями (5).

$$K_1 = \frac{\varepsilon_1 T_{KO}^3}{(\varepsilon_1 + \omega \varepsilon_3) T_{GO}^3} (1 - \theta_0) + \eta \left[\frac{\partial \theta}{\partial T_K} \right]_{T_K=T_{KO}}, \quad K_2 = \frac{\varepsilon_3 T_{MO}^3}{(\varepsilon_1 + \omega \varepsilon_3) T_{GO}^3} (1 - \theta_0) + \eta \left[\frac{\partial \theta}{\partial T_M} \right]_{T_M=T_{MO}},$$

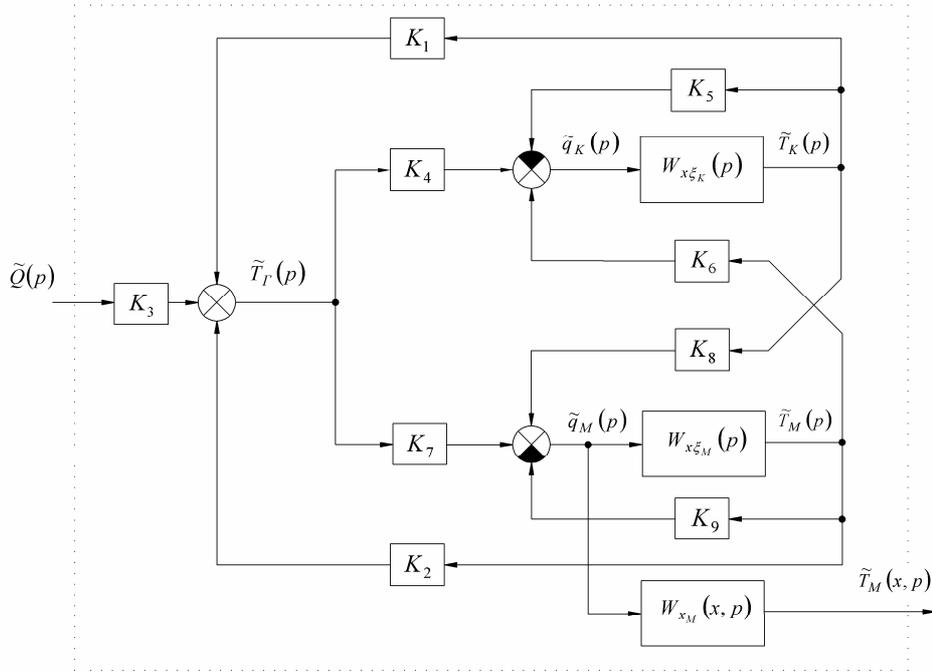
$$K_3 = \eta \left[\frac{\partial \theta}{\partial Q} \right]_{Q=Q_0}, \quad \eta = \frac{(\varepsilon_1 + \omega \varepsilon_3) T_T^4 - \varepsilon_1 T_{KO}^4 - \omega \varepsilon_3 T_{MO}^4}{4(\varepsilon_1 + \omega \varepsilon_3) T_{GO}^4}, \quad (5)$$

$$K_4 = 4\sigma_0 \varepsilon_1 T_{GO}^3, \quad K_5 = 4\sigma_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) T_{KO}^3, \quad K_6 = 4\sigma_0 \varepsilon_2 T_{MO}^3,$$

$$K_7 = 4\sigma_0 \varepsilon_3 T_{GO}^3, \quad K_8 = 4\sigma_0 \varepsilon_4 T_{KO}^3, \quad K_9 = 4\sigma_0 (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) T_{MO}^3,$$

где T_{GO}, T_{KO}, T_{MO} - соответственно абсолютные среднеэффективные температуры исходного статического режима.

Как видно из рисунка, газовая отражательная печь представляет собой сложный объект с распределенными параметрами при сосредоточенном управлении $\tilde{Q}(p)$ и распределенном выходе $\tilde{T}(x, p)$ [2]. Распределенная передаточная функция объекта определится известными коэффициентами передачи $K_1 \div K_9$, передаточной функцией для внутренней поверхности кладки $W_{x_K}^{\xi}(p)$ и температуры поверхности нагреваемого тела $W_{x_M}^{\xi}(p)$. Передаточная функция $W_{x_M}(x, p)$ характеризует нагрев температуры по всему объему металлической ванны.



Структурная схема объекта

В линейном и одномерном приближении динамика процессов для кладки и металлического изделия будет описываться уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

при граничных условиях 2-го рода на теплообменивающихся поверхностях. Здесь x - координата тела в направлении передачи тепла, отсчитываемая от поверхности теплообмена, a - температуропроводность, t - время.

Кладку можно считать полуограниченным телом, и тогда граничные условия примут вид

$$\left. \frac{\partial T_K(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{q_K(t)}{\lambda_K}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T_K(x,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 \leq x < \infty; t \geq 0, \quad (7)$$

где λ_K - коэффициент теплопроводности кладки.

Применяя метод операционного исчисления (преобразование Лапласа), с учетом того, что входной сигнал сосредоточен $\tilde{q}_K(p)$, а выходной сигнал распределен $\tilde{T}_K(x,p)$, получим x -блок [2] с передаточной функцией вида

$$W_{x_K}(x,p) = \frac{\tilde{T}_K(x,p)}{\tilde{q}_K(p)} = \frac{\exp(-\sqrt{\tau_x p})}{\sqrt{\tau_0 p}}, \quad (8)$$

где $\tau_0 = \frac{\lambda_K^2}{a}$, $\tau_x = \frac{x^2}{a}$ - постоянные времени.

Температура поверхности кладки $\tilde{T}_K(p)$ в (4) является сосредоточенной величиной. Поэтому вид передаточной функции нагрева кладки с учетом сосредоточенности входной и выходной координаты примет вид

$$W_{x_{\xi_K}}(p) = W_{x_K}(x,p) \Big|_{x=0} = \frac{\tilde{T}_K(p)}{\tilde{q}_K(p)} = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 p}}. \quad (9)$$

Данный блок, согласно теории систем с распределенными параметрами, называется $x\xi$ -блоком. А передаточная функция (9) соответствует полуинтегрирующему звену.

В случае металлической ванны необходимо учитывать конечные размеры ванны, тогда граничные условия примут вид

$$\left. \frac{\partial T_M(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \left. \frac{\partial T_M(x,t)}{\partial x} \right|_{x=R} = \frac{q_M(t)}{\lambda_M}; \quad 0 \leq x \leq R; t \geq 0, \quad (10)$$

где R - глубина металлической ванны; λ_M - коэффициент теплопроводности металла.

Применяя метод операционного исчисления (преобразование Лапласа), с учетом сосредоточенности входного $\tilde{q}_M(p)$ и распределенности выходного сигнала $\tilde{T}_M(x, p)$ в общем случае, получим х-блок [2] с передаточной функцией вида

$$W_{x_M}(x, p) = \frac{\tilde{T}_M(x, p)}{\tilde{q}_M(p)} = \frac{ch\sqrt{\tau_x p}}{\sqrt{\tau_0 p} \cdot sh\sqrt{\tau_R p}}, \quad (11)$$

где $\tau_0 = \frac{\lambda_M^2}{a}$, $\tau_x = \frac{x^2}{a}$, $\tau_R = \frac{R^2}{a}$ - постоянные времени.

Температура поверхности металлической ванны $\tilde{T}_M(p)$ в (4) является сосредоточенной величиной. Поэтому вид передаточной функции нагрева металла с учетом сосредоточенности входной и выходной координаты примет вид

$$W_{x\xi_M}(p) = W_{x_M}(x, p)|_{x=R} = \frac{\tilde{T}_M(p)}{\tilde{q}_M(p)} = \frac{cth\sqrt{\tau_R p}}{\sqrt{\tau_0 p}}. \quad (12)$$

Данный блок является $x\xi$ - блоком [2].

В случае применения метода конечных интегральных преобразований для краевой задачи (6) с граничными условиями (10) для металлического изделия решение будет иметь вид

$$W_{x_M}(x, p) = \frac{1}{c_M \gamma_M R} \left[\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n(x)}{T_n p + 1} \right], \quad k_n(x) = 2(-1)^n \frac{R^2}{a\pi^2 n^2} \cos\left(\pi n \frac{x}{R}\right), \quad T_n = \frac{R^2}{a\pi^2 n^2}, \quad (13)$$

где c_M, γ_M - соответственно удельная теплоемкость и удельный вес металла.

Передаточные функции (9), (11) и (12), входящие в структурную схему объекта, не могут быть представлены набором типовых динамических звеньев. Поэтому изучение динамических свойств объекта на основании базовых характеристик стандартных динамических звеньев, является затруднительным. В данном случае требуется самостоятельный анализ, например, путем исследования частотных характеристик, определяемых прямым их вычислением по формулам (9), (11) и (12) как трансцендентных функций мнимого аргумента в области существенных частот, где подобные аналогии с сосредоточенными системами уже оказываются возможными. В случае выбора решения краевой задачи вида (13), мы можем производить определенные аналогии с сосредоточенными системами. Т.к. распределенная передаточная функция допускает структурное представление в виде параллельного соединения одного интегрирующего и бесконечного числа типовых аperiodических звеньев первого порядка с постоянными времени T_n и коэффициентами передачи $k_n(x)$.

Исходные зависимости (1), (2) и (3) получены для существенной схематизации процессов внешнего теплообмена [1]. Ввиду трудностей принципиального характера принятая схема не учитывает таких существенных особенностей, как пространственная неравномерность температурного поля излучающей среды, наличие поля тепловыделений в зоне теплообмена, светимость факела, температурные зависимости теплофизических постоянных. Однако на основании специальных экспериментов [1] можно утверждать, что проведенная структура объекта учитывает основные качественные особенности рассматриваемых динамических процессов. Влияние неучтенных особенностей сказывается, в основном, на вариациях коэффициентов $K_1 \div K_9$.

Во многих случаях для определения температурного поля нагреваемого тела требуется двух- или трехмерное представление задачи теплопроводности. Двухмерное представление задачи теплопроводности рассмотрено в [3]. Соответствующие передаточные функции легко получаются при граничных условиях 2-го рода суммированием передаточных функций соответствующих одномерных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рапопорт Э.Я. Автоматическое регулирование температуры жидкого металла в газовых отражательных плавильных и раздаточных печах для алюминиевых сплавов. Канд. дис. Куйбышев, 1965.
2. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами: Учеб. пособие М.: Высшая школа, 2003. 299с.
3. Узенгер А.А. Динамика процессов нагрева жидкой ванны в газовых печах// Вестник СамГТУ №41. Сер. Технические науки, Самара, 2006.

Статья поступила в редакцию 22 февраля 2007 г.