

# Машиностроение

УДК 621.787:539.319

## ЗАВИСИМОСТЬ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННЫХ ОБРАЗЦОВ С НАДРЕЗАМИ ОТ РАЗМЕРОВ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

**В.Ф. Павлов, В.А. Кирпичёв, А.П. Филатов, В.В. Сазанов,  
Ю.С. Ларионова**

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)  
Россия, 443086, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34  
E-mail: sopromat@ssau.ru

*Экспериментально установлено, что с увеличением размеров поперечного сечения образцов при одной и той же упрочняющей обработке сжимающие остаточные напряжения в поверхностном слое увеличиваются с одновременным уменьшением реактивных растягивающих напряжений в сердцевине. Для сохранения эффекта поверхностного упрочнения по сопротивлению многоциклового усталости необходимо увеличивать толщину поверхностного слоя со сжимающими остаточными напряжениями пропорционально размерам опасного поперечного сечения деталей. Показано, что оценка влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости деталей по критерию среднеинтегральных остаточных напряжений приводит к незначительному рассеянию соответствующего коэффициента по сравнению с оценкой по критерию остаточных напряжений на поверхности опасного сечения деталей. Поэтому критерий среднеинтегральных остаточных напряжений может быть рекомендован для прогнозирования предела выносливости упрочненных деталей с концентраторами напряжений.*

**Ключевые слова:** *поверхностное упрочнение, предел выносливости, диаметр образца, концентратор напряжений, остаточные напряжения.*

Для исследования влияния на предел выносливости размеров поперечного сечения упрочненных деталей в условиях концентрации напряжений были проведены эксперименты на сплошных цилиндрических упрочненных и неупрочненных образцах различного диаметра из стали 20 с круговыми надрезами полу-круглого профиля. Исследуемая сталь 20 имела следующие механические характеристики:  $\sigma_T = 395$  МПа,  $\sigma_g = 522$  МПа,  $\delta = 26,1$  %,  $\psi = 65,9$  %,  $S_K = 1416$  МПа.

---

*Валентин Фёдорович Павлов (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой «Сопротивление материалов».*

*Виктор Алексеевич Кирпичёв (д.т.н., доц.), профессор кафедры «Сопротивление материалов».*

*Анатолий Петрович Филатов (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Сопротивление материалов».*

*Василий Вячеславович Сазанов, аспирант кафедры «Сопротивление материалов».*

*Юлия Сергеевна Ларионова, аспирант кафедры «Сопротивление материалов».*

Гладкие образцы сплошного сечения диаметром  $D = 10$  мм,  $D = 25$  мм и  $D = 50$  мм подвергались пневмодробеструйной обработке (ПДО) дробью диаметром 1,5 – 2,5 мм при давлении воздуха 0,28 МПа в течение 10 минут, а также обкатке роликом диаметром 60 мм и профильным радиусом 1,6 мм при усилии  $P = 0,5$  кН (ОР1) и  $P = 1,0$  кН (ОР2) с подачей 0,11 мм/об и скоростью вращения образца 400 об/мин. Затем на все упрочненные и неупрочненные гладкие образцы наносились круговые надрезы полукруглого профиля радиуса  $R = 0,5$  мм (рис. 1).

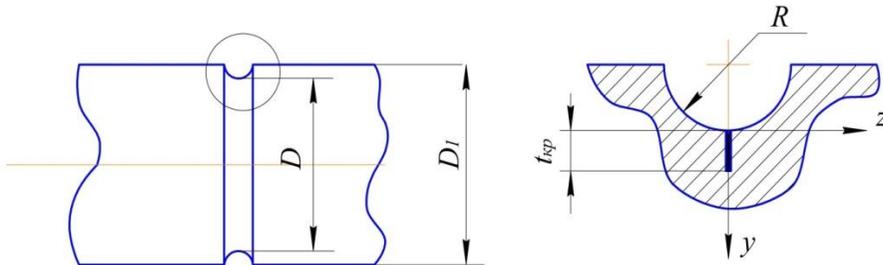


Рис. 1. Образец с надрезом полукруглого профиля и нераспространяющаяся трещина усталости

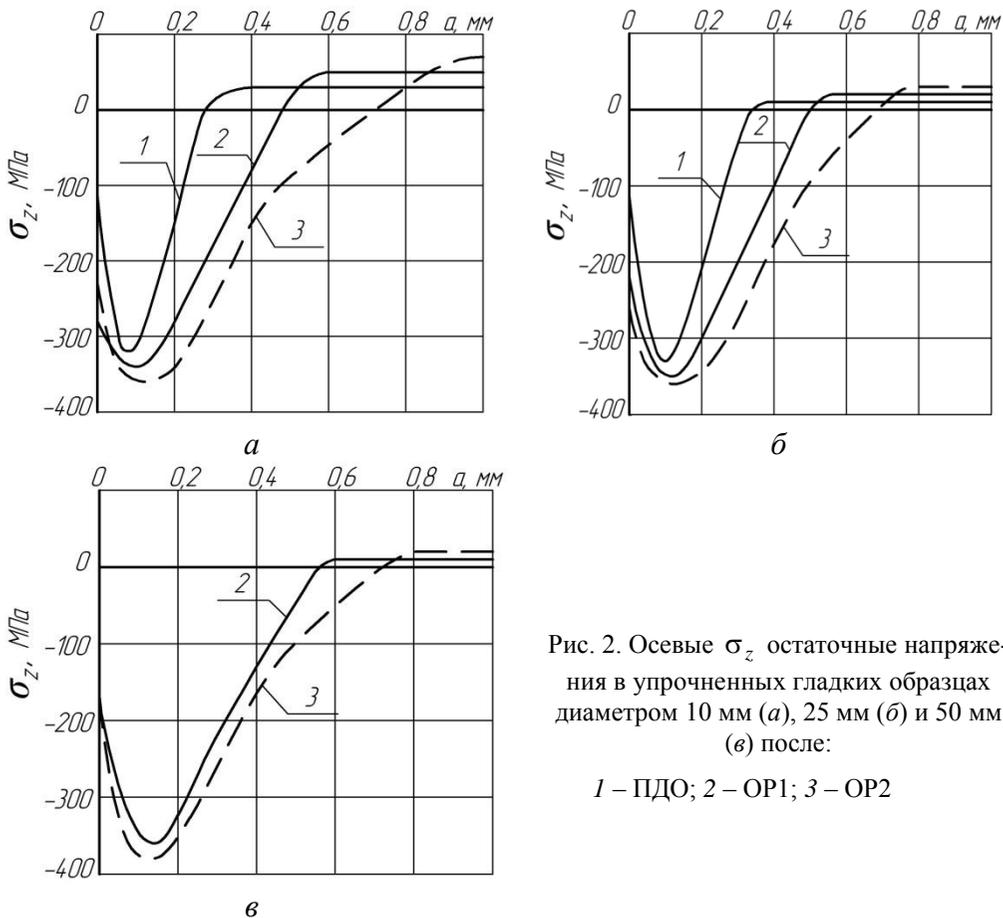


Рис. 2. Осевые  $\sigma_z$  остаточные напряжения в упрочненных гладких образцах диаметром 10 мм (а), 25 мм (б) и 50 мм (в) после:

1 – ПДО; 2 – ОР1; 3 – ОР2

Остаточные напряжения в гладких образцах определялись экспериментально методом колец и полосок [1]. Распределение осевых  $\sigma_z$  остаточных напряжений

по толщине поверхностного слоя  $a$  гладких образцов представлено на рис. 2. Можно видеть, что сжимающие остаточные напряжения и глубина их залегания при одной и той же упрочняющей обработке с увеличением диаметра образцов увеличиваются, что объясняется повышением жесткости образцов с увеличением размеров их поперечного сечения. При этом реактивные (растягивающие) остаточные напряжения в сердцевине образцов с увеличением диаметра уменьшаются.

Остаточные напряжения в образцах с надрезами определялись расчетным путем – суммированием дополнительных остаточных напряжений за счет перераспределения остаточных усилий после опережающего поверхностного пластического деформирования и остаточных напряжений гладких образцов. При этом дополнительные остаточные напряжения вычислялись как аналитическим [2], так и численным методами с использованием программного комплекса *Nastran/Patran* [3]. Следует отметить, что результаты определения дополнительных остаточных напряжений двумя методами имели хорошее совпадение.

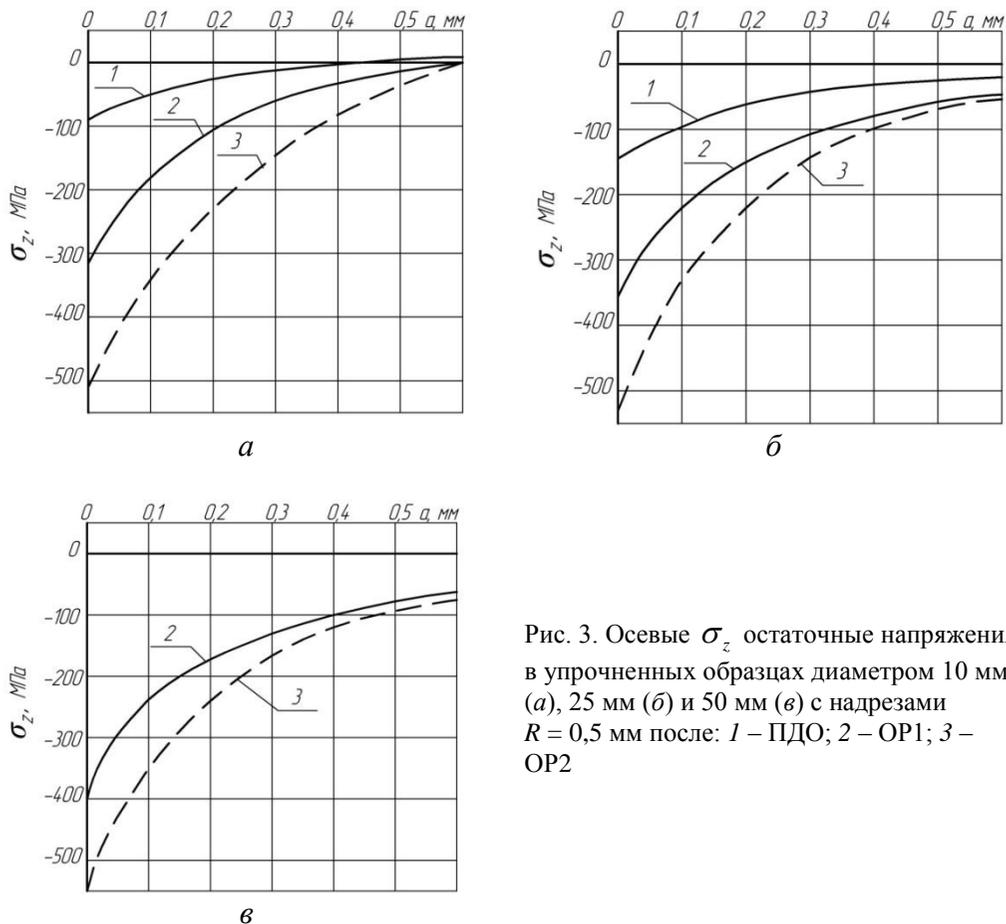


Рис. 3. Осевые  $\sigma_z$  остаточные напряжения в упрочненных образцах диаметром 10 мм (а), 25 мм (б) и 50 мм (в) с надрезами  $R = 0,5$  мм после: 1 – ПДО; 2 – ОР1; 3 – ОР2

Распределение осевых  $\sigma_z$  остаточных напряжений по толщине поверхностного слоя  $a$  в наименьшем сечении образцов с надрезом  $R = 0,5$  мм приведено на рис. 3, а значения остаточных напряжений на поверхности дна надрезов  $\sigma_z^{\text{пов}}$  представлены в таблице. Можно видеть, что при одной и той же упрочняющей

обработке сжимающие остаточные напряжения на поверхности надреза  $\sigma_z^{нов}$  с увеличением диаметра образца увеличиваются. Этот факт объясняется увеличением сжимающих остаточных напряжений и глубины их залегания в упрочненных гладких образцах с увеличением их диаметра.

### Результаты испытаний образцов на усталость и определения остаточных напряжений

$D_1$ , мм	$D$ , мм	Неупрочненные образцы $\sigma_{-1}$ , МПа	Упрочненные образцы						
			Обработка	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_z^{нов}$ , МПа	$\Psi_\sigma$	$t_{кр}$ , мм	$\bar{\sigma}_{ост}$ , МПа	$\bar{\Psi}_\sigma$
10	9	120	ПДО	137,5	-90	0,194	0,196	-48	0,365
			ОР1	187,5	-311	0,217	0,202	-178	0,379
			ОР2	250	-517	0,251	0,192	-333	0,390
25	24	112,5	ПДО	130	-142	0,123	0,525	-52	0,337
			ОР1	150	-349	0,107	0,530	-111	0,338
			ОР2	172,5	-525	0,114	0,520	-169	0,355
50	49	92,5	ОР1	122,5	-396	0,078	1,077	-82	0,366
			ОР2	132,5	-547	0,073	1,024	-112	0,357

Обращает на себя внимание значение наибольших сжимающих остаточных напряжений на поверхности надреза, достигающее -547 МПа (ОР2) при  $D_1 = 50$  мм и превышающее не только предел текучести, но и предел прочности материала образцов. Наблюдаемому явлению было дано объяснение в работе [4], в которой показано, что наибольшая величина сжимающих остаточных напряжений в упрочненном поверхностном слое детали при плоском напряженном состоянии может превышать даже сопротивление разрыву  $S_K$  материала детали на 15 %. Этот предел в исследуемом случае ( $S_K = 1416$  МПа) не достигнут.

Испытания на многоцикловую усталость при изгибе в случае симметричного цикла неупрочненных и упрочненных образцов диаметром 10 мм в гладкой части проводились на машине МУИ-6000, диаметром 25 мм – на машине УММ-01 [5], диаметром 50 мм – на машине УМП-02 [5]; база испытаний –  $3 \cdot 10^6$  циклов нагружения.

Результаты определения предела выносливости  $\sigma_{-1}$  представлены в таблице. Упрочненные образцы, выстоявшие базу испытаний при напряжении, равном пределу выносливости, доводились до разрушения при больших напряжениях. На изломах этих образцов были обнаружены нераспространяющиеся трещины усталости, глубина  $t_{кр}$  которых приведена в таблице. Нераспространяющиеся трещины в образцах диаметром 10 мм имели концентрическую форму, так как эти образцы испытывались на усталость при чистом изгибе с вращением, а в образцах диаметром 25 мм и 50 мм – серповидную форму, так как они испытывались при поперечном изгибе в одной плоскости. На рис. 4 приведена фотография излома образца диаметром 10 мм после ПДО, а на рис. 5 – диаметром 25 мм после обкатки роликом (ОР2). На фотографиях четко просматриваются нераспространяющиеся трещины усталости 2.

Критическая глубина  $t_{кр}$  нераспространяющейся трещины усталости, измеренная в настоящем исследовании, незначительно (3,2 %) отличается от величины  $t_{кр}$ , вычисленной по зависимости, предложенной в работах [6, 7] на основании анализа большого числа экспериментов:

$$t_{кр} = 0,0216D, \quad (1)$$

где  $D$  – диаметр опасного сечения детали (образца).

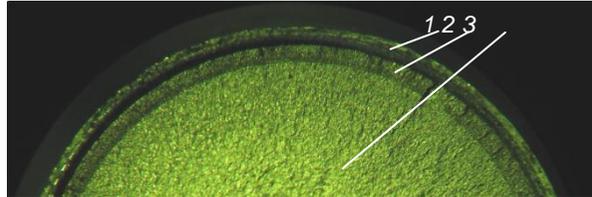


Рис. 4. Фотография излома упрочненного дробью образца диаметром

$$D_1 = 10 \text{ мм с надрезом } R = 0,5 \text{ мм:}$$

1 – надрез, 2 – нераспространяющаяся трещина,  
3 – зона долома

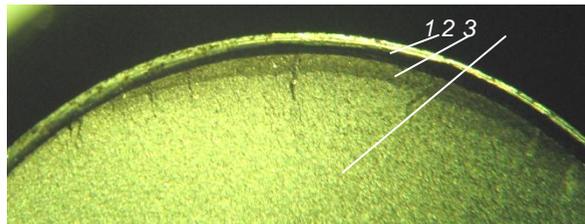


Рис. 5. Фотография излома упрочненного роликом образца диаметром

$$D_1 = 25 \text{ мм с надрезом } R = 0,5 \text{ мм:}$$

1 – надрез, 2 – нераспространяющаяся трещина,  
3 – зона долома

Из представленных в таблице данных видно, что опережающее поверхностное пластическое деформирование пневмодробеструйной обработкой и обкаткой роликом приводит к повышению предела выносливости образцов с надрезом. Наиболее эффективна для исследованных образцов обкатка роликом, причем с увеличением усилия обкатки с  $P = 0,5 \text{ кН}$  до  $P = 1,0 \text{ кН}$  предел выносливости возрастает. Наблюдаемое явление объясняется большей глубиной залегания сжимающих остаточных напряжений в гладких упрочненных образцах при увеличении усилия обкатки (рис. 2), результатом чего явилось повышение остаточных напряжений в образцах с надрезом (рис. 3).

Оценка влияния поверхностного упрочнения на приращение предела выносливости  $\Delta\sigma_{-1}$  образцов с надрезом проводилась по двум критериям: осевым остаточным напряжениям на поверхности надреза  $\sigma_z^{ноб}$  [8-15] и среднеинтегральным остаточным напряжениям  $\bar{\sigma}_{осм}$  [7, 16-18]:

$$\Delta\sigma_{-1} = \psi_{\sigma} \left| \sigma_z^{ноб} \right|, \quad (2)$$

$$\Delta\sigma_{-1} = \bar{\psi}_{\sigma} \left| \sigma_{осм} \right|, \quad (3)$$

где  $\psi_\sigma$  и  $\bar{\psi}_\sigma$  – коэффициенты влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости по критериям  $\sigma_z^{нов}$  и  $\bar{\sigma}_{ост}$  соответственно;

$$\bar{\sigma}_{ост} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sigma_z(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi; \quad (4)$$

$\sigma_z(\xi)$  – осевые остаточные напряжения в опасном сечении образца с концентратором по толщине поверхностного слоя  $a$ ;  $\xi = a/t_{кр}$  – расстояние от поверхности опасного сечения образца до текущего слоя, выраженное в долях  $t_{кр}$ ;  $t_{кр}$  – критическая глубина нераспространяющейся трещины усталости, возникающей в упрочненном образце с концентратором напряжений при работе на пределе выносливости.

С увеличением диаметра образцов от 10 до 50 мм приращение предела выносливости при одних и тех же режимах упрочняющей обработки уменьшается. Это связано с тем, что толщина слоя со сжимающими остаточными напряжениями при увеличении диаметра возрастает незначительно по сравнению с толщиной поверхностного слоя образцов, ответственной за повышение многоциклового усталости и равной критической глубине  $t_{кр}$  нераспространяющейся трещины усталости. Поэтому для сохранения эффекта упрочнения с увеличением диаметра детали следует в соответствии с формулами (1) и (4) увеличивать толщину упрочненного поверхностного слоя (толщину слоя со сжимающими остаточными напряжениями) пропорционально критической глубине  $t_{кр}$  нераспространяющейся трещины усталости.

Из анализа приведенных в таблице данных видно, что оценка влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости образцов в условиях концентрации напряжений по критерию  $\sigma_z^{нов}$  – остаточным напряжениям на поверхности концентратора – приводит к значительному рассеянию соответствующего коэффициента  $\psi_\sigma$ . Этот коэффициент в проведенном исследовании изменяется в широких пределах: от 0,073 до 0,251, то есть изменяется почти в 3,5 раза, что неприемлемо для прогнозирования предела выносливости поверхностно упрочненных деталей.

Оценка влияния поверхностного упрочнения по критерию  $\bar{\sigma}_{ост}$  – среднеинтегральным остаточным напряжениям – приводит к существенно меньшему рассеянию соответствующего коэффициента  $\bar{\psi}_\sigma$ . Коэффициент  $\bar{\psi}_\sigma$  в проведенном исследовании изменяется от 0,337 до 0,390, составляя в среднем 0,361, и практически не отличается от значения  $\bar{\psi}_\sigma = 0,36$ , установленного в работе [7] для упрочненных образцов и деталей с аналогичной концентрацией напряжений.

## Выводы

1. При одной и той же поверхностной упрочняющей обработке с увеличением размеров поперечного сечения гладких образцов сжимающие остаточные напряжения и глубина их залегания возрастают с одновременным уменьшением растягивающих (реактивных) остаточных напряжений в сердцевине образцов.

2. Критическая глубина нераспространяющейся трещины усталости, выявленная в настоящем исследовании для упрочненных пневмодробеструйной

обработкой и обкаткой роликом образцов различного диаметра (10 – 50 мм) из стали 20, соответствует установленной ранее зависимости для деталей и образцов из других сталей и сплавов.

3. Оценка влияния поверхностного упрочнения на приращение предела выносливости образцов (деталей) различного диаметра в условиях концентрации по остаточным напряжениям на поверхности опасного сечения приводит к существенному рассеянию соответствующего коэффициента  $\psi_{\sigma}$ , что неприемлемо для прогнозирования предела выносливости упрочненных деталей на практике.

4. Оценка влияния поверхностного упрочнения на приращение предела выносливости образцов (деталей) различного диаметра по критерию среднеинтегральных остаточных напряжений приводит к незначительному рассеянию соответствующего коэффициента  $\bar{\psi}_{\sigma}$ , и поэтому этот критерий может быть рекомендован для прогнозирования предела выносливости упрочненных деталей с концентраторами напряжений.

5. С увеличением размеров поперечного сечения деталей в условиях концентрации напряжений для сохранения эффекта поверхностного упрочнения по сопротивлению многоциклового усталости необходимо увеличивать толщину поверхностного слоя со сжимающими остаточными напряжениями пропорционально размерам опасного поперечного сечения деталей.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иванов С.И.* К определению остаточных напряжений в цилиндре методом колец и полосок // Остаточные напряжения. – Куйбышев: КуАИ, 1971. – Вып. 53. – С. 32-42.
2. *Иванов С.И., Шатунов М.П., Павлов В.Ф.* Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. – Куйбышев: КуАИ, 1974. – Вып. 1. – С. 88-95.
3. *Сазанов В.П., Чирков А.В., Самойлов В.А., Ларионова Ю.С.* Моделирование перераспределения остаточных напряжений в упрочненных цилиндрических образцах при опережающем поверхностном пластическом деформировании // Вестник СГАУ. – Самара: СГАУ, 2011. – № 3 (27). Ч. 3. – С. 171-174.
4. *Радченко В.П., Павлов В.Ф.* Наибольшая величина сжимающих остаточных напряжений при поверхностном упрочнении деталей // Труды МНТК «Прочность материалов и элементов конструкций». – Киев: ИПП им. Г.С. Писаренко НАНУ, 2011. – С. 354-357.
5. *Филатов Э.Я., Павловский В.Э.* Универсальный комплекс машин для испытания материалов и конструкций на усталость. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 92 с.
6. *Павлов В.Ф.* Влияние на предел выносливости величины и распределения остаточных напряжений в поверхностном слое детали с концентратором. Сообщение I. Сплошные детали // Известия вузов. Машиностроение. – 1988. – № 8. – С. 22-26.
7. *Павлов В.Ф., Кирпичёв В.А., Вакулюк В.С.* Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям. – Самара: Издательство СНЦ РАН, 2012. – 125 с.
8. *Свешников Д.А., Кудрявцев И.В., Гуляева Н.А.* Сопротивление усталости цементированных и цианированных сталей применительно к зубчатым колесам. – М.: ВНИИТМАШ, ОНТИ, 1966. – С. 48-55.
9. *Кравченко Б.А., Митряев К.Ф.* Обработка и выносливость высокопрочных материалов. – Куйбышев: Куйбышевское книжное издательство, 1968. – 131 с.
10. *Серенсен С.В., Борисов С.П., Бородин Н.А.* К вопросу об оценке сопротивления усталости поверхностно упрочненных образцов с учетом кинетики остаточной напряженности // Проблемы прочности. – 1969. – № 2. – С. 3-7.
11. *Туровский М.Л., Шифрин Н.М.* Концентрация напряжений в поверхностном слое цементированной стали // Вестник машиностроения. – 1970. – № 11. – С. 37-40.
12. *Туровский М.Л.* Остаточные напряжения во впадинах зубьев цементованных шестерен // Вестник машиностроения. – 1971. – № 9. – С. 38-40.
13. *Митряев К.Ф., Егоров В.И., Мальков Г.Ф., Уланов Б.Н., Степанов В.В.* Повышение

- усталостной прочности жаропрочных материалов алмазным выглаживанием поверхности деталей // Остаточные напряжения. – Куйбышев: КуАИ, 1971. – Вып. 53. – С. 150-159.
14. Иванов С.И., Павлов В.Ф. Влияние остаточных напряжений и наклепа на усталостную прочность // Проблемы прочности. – 1976. – № 5. – С. 25-27.
  15. Иванов С.И., Павлов В.Ф., Прохоров А.А. Влияние остаточных напряжений на сопротивление усталости при кручении в условиях концентрации напряжений // Проблемы прочности. – 1988. – № 5. – С. 31-33.
  16. Павлов В.Ф. О связи остаточных напряжений и предела выносливости при изгибе в условиях концентрации напряжений // Известия вузов. Машиностроение. – 1986. – № 8. – С. 29-32.
  17. Павлов В.Ф., Прохоров А.А. Связь остаточных напряжений и предела выносливости при кручении в условиях концентрации напряжений // Проблемы прочности. – 1991. – № 5. – С. 43-46.
  18. Радченко В.П., Афанасьева О.С. Методика расчета предела выносливости упрочненных цилиндрических образцов с концентраторами напряжений при температурных выдержках в условиях ползучести // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (19). – С. 264-268.

*Статья поступила в редакцию 25 января 2014 г.*

## **SURFACE HARDENED SPECIMENS WITH CUTS ENDURANCE LIMIT DEPENDENCE ON CROSS-SECTION SIZES**

***V.F. Pavlov, V.A. Kirpichev, A.P. Filatov, V.V. Sazanov, Yu.S. Larionova***

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University)  
34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086

*It's experimentally established that hardened specimens cross-section sizes increase leads to the increase of compressive residual stresses in the surface layer and the decrease of reactive tensile stresses in the core under the same type of hardening. It's necessary to increase the thickness of surface hardened layer with compressive residual stresses proportionally to the parts dangerous cross-section sizes for hardening effect preservation. It's been shown that surface hardening influence on the parts endurance limit evaluation using the average integral residual stresses criterion leads to the slight dispersion of the stresses concentration coefficient versus the same evaluation using the dangerous section surface residual stresses criterion. So the average integral residual stresses criterion can be recommended for the hardened parts with stresses concentrators endurance limit forecasting.*

***Keywords:*** *surface hardening, endurance limit, specimen's diameter, stresses concentrator, residual stresses.*

---

*Valentin F. Pavlov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*

*Victor A. Kirpichev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*

*Anatoly P. Filatov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*

*Vacily V. Sazanov, Postgraduate Student.*

*Yulia S. Yarionova, Postgraduate Student.*

УДК 621.757.05-52

## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СХЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СБОРКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ

**Л.Б. Черняховская**

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

*Рассмотрен способ сборки цилиндрических деталей с гарантированным зазором, в котором втулка под действием силы тяжести перемещается, опираясь тремя точками на поверхность вала, закрепленного в горизонтальном положении. Проведен кинематический анализ процесса совмещения, установлено, что движение втулки в этом случае является плоскопараллельным, определены координаты и скорости всех точек, расположенных в плоскости симметрии деталей. Анализ особенностей контакта втулки с кромкой вала в двух симметрично расположенных точках позволил определить для них направления нормальных реакций и сил трения. Составлена система трех дифференциальных уравнений, описывающих движение втулки под действием силы тяжести, представляющая собой динамическую модель процесса горизонтальной схемы сборки цилиндрических деталей. Приведены результаты решения дифференциальных уравнений с помощью программы Mathcad для конкретных деталей, которые показали, что динамические реакции не превышают значения силы тяжести втулки, что исключает заклинивание деталей и повреждение их поверхностей в процессе рассматриваемой схемы сборки.*

**Ключевые слова:** цилиндрические детали, горизонтальная схема сборки, три точки контакта, скорости, динамические реакции.

Большинство известных способов и устройств, предназначенных для автоматической сборки цилиндрических деталей с гарантированным зазором, реализуют схемы совмещения, в которых втулка закрепляется неподвижно в вертикальном или горизонтальном положении, а подвижной деталью является вал. Наиболее полно исследована вертикальная схема сборки, для которой определены геометрические и кинематические параметры, характеризующие процесс совмещения деталей при первоначальном контакте их поверхностей в трех или двух точках.

Недостатком вертикальной схемы сборки является действие на подвижную деталь в точках контакта значительных по величине сил сопротивления, которые могут приводить к повреждению совмещаемых поверхностей или к заклиниванию деталей. Причиной возникновения этих сил являются сила тяжести подвижной детали, препятствующая совмещению, и сборочное усилие, обеспечивающее этот процесс.

В данной работе анализируется (рис. 1) способ сборки цилиндрических деталей [1], заключающийся в том, что вал 1 закрепляют в горизонтальном положении, втулку 2 устанавливают на вал сверху так, чтобы она опиралась внутренней поверхностью на три точки поверхности вала, а противоположной стороной на подвижную в вертикальном направлении опору 3. Затем предоставляют втулке возможность под действием силы тяжести опускаться, перемещая опору вниз до

момента полного совмещения кромок, после чего горизонтальным толкателем 4 перемещают втулку по поверхности вала до полного совмещения рабочих поверхностей.

Целью исследования является создание динамической модели процесса совмещения втулки с горизонтально закрепленным валом, определение на ее основе сил взаимодействия между деталями в точках контакта и оценка их влияния на процесс совмещения.

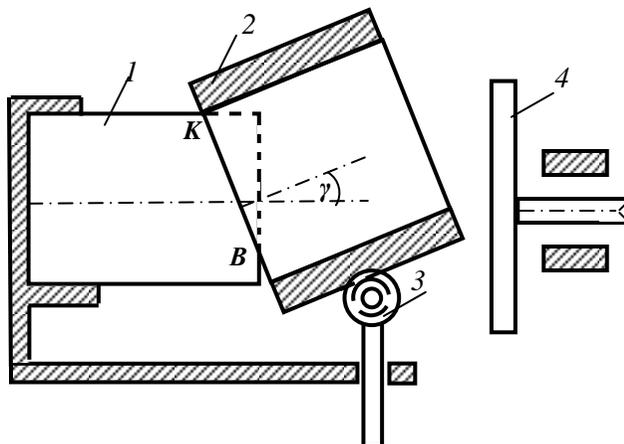


Рис. 1. Способ сборки цилиндрических деталей в случае горизонтально закрепленного вала

При решении этой задачи обе детали считаются абсолютно твердыми телами правильной геометрической формы, а контакт между их поверхностями – точечным, детали имеют гарантированный зазор  $\delta = D - d$ , где  $D$  – диаметр отверстия втулки,  $d$  – диаметр вала. Необходимые для расчетов геометрические параметры, характеризующие относительное расположение деталей, определены в работе [2].

В этом случае (рис. 2) так же, как и при вертикальной схеме сборки, одна точка контакта  $K$  деталей располагается в плоскости симметрии деталей между образующей вала и кромкой отверстия втулки, а две другие точки – между кромками обеих деталей симметрично плоскости, проходящей через их оси; середина отрезка, соединяющего симметричные точки контакта, точка  $B$ , находится в плоскости симметрии деталей на расстояниях  $O_1B$  и  $O_2B$  от центров окружностей  $O_1$  и  $O_2$  совмещаемых кромок втулки и вала.

Так как точки контакта расположены симметрично плоскости, проходящей через оси деталей, а сила тяжести расположена в этой плоскости, то движение втулки, протекающее под действием силы тяжести, является плоскопараллельным с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью симметрии.

Плоскопараллельное движение втулки описывается совокупностью трех уравнений: уравнения Лагранжа и дифференциальных уравнений движения центра масс, связывающих угол  $\gamma$  с действующими на втулку силами:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma} = Q_\gamma;$$

$$m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}; \quad m \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum F_{kz},$$

где  $T$  – кинетическая энергия втулки;  
 $Q_\gamma$  – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате;  
 $m$  – масса втулки;  $y_C, z_C$  – координаты ее центра масс;  
 $\sum F_{ky}, \sum F_{kz}$  – суммы проекций всех приложенных к втулке сил на оси координат.

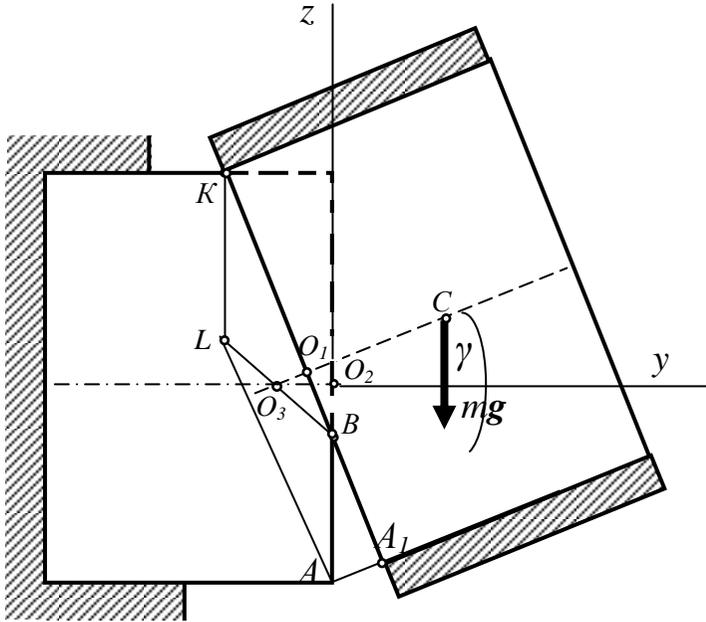


Рис. 2. Относительное расположение деталей в процессе совмещения

Кинетическая энергия втулки равна

$$T = \frac{m}{2}(V_{Cy}^2 + V_{Cz}^2) + \frac{I_{Cx}\dot{\gamma}^2}{2},$$

где  $V_{Cy} = \frac{dy_C}{dt}$ ,  $V_{Cz} = \frac{dz_C}{dt}$  – проекции скорости центра масс на оси координат;

$I_{Cx}$  – момент инерции втулки относительно оси  $Cx$ , проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости симметрии деталей

Для составления дифференциальных уравнений необходимо:

1) выразить координаты центра масс втулки в зависимости от угла  $\gamma$  и получить значения их первых и вторых производных по времени, которые определяют левые части всех трех уравнений;

2) установить направления всех действующих на втулку сил, что необходимо для составления правых частей уравнений.

1. Положение центра масс втулки в процессе сборки определяется относительно неподвижной системы координат  $O_2yz$ , связанной с центром окружности совмещаемой кромки вала (см. рис. 2), ее координаты равны

$$y_C = \left(\frac{H}{2} + h_1\right) \cos \gamma - h_2, \quad z_C = 0,5H \sin \gamma + h_1 \sin \gamma,$$

где  $H$  – высота втулки;

$h_1 = O_3O_1$  и  $h_2 = O_3O_2$  – расстояния между точкой пересечения осей деталей  $O_3$  и центрами  $O_1$  и  $O_2$  совмещаемых кромок:

$$h_1 = \frac{d - D \cos \gamma}{2 \sin \gamma}, \quad h_2 = \frac{D - d \cos \gamma}{2 \sin \gamma}.$$

Проекции скорости центра масс на оси координат

$$V_{Cy} = \frac{dy_C}{d\gamma} \dot{\gamma}, \quad V_{Cz} = \frac{dz_C}{d\gamma} \dot{\gamma},$$

где  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \omega$  – угловая скорость втулки.

Проекции ускорения центра масс на оси координат

$$a_{Cy} = \frac{d^2 y_C}{d\gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{dy_C}{d\gamma} \ddot{\gamma}, \quad a_{Cz} = \frac{d^2 z_C}{d\gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{dz_C}{d\gamma} \ddot{\gamma},$$

где  $\ddot{\gamma} = \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = \varepsilon$  – угловое ускорение втулки.

После подстановки полученных значений левые части дифференциальных уравнений центра масс и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \gamma} = m \left[ \left( \frac{dy_C}{d\gamma} \right)^2 + \left( \frac{dz_C}{d\gamma} \right)^2 \right] \ddot{\gamma} + I_{Cx} \ddot{\gamma} + m \left( \frac{dy_C}{d\gamma} \frac{d^2 y_C}{d\gamma^2} + \frac{dz_C}{d\gamma} \frac{d^2 z_C}{d\gamma^2} \right) \dot{\gamma}^2;$$

$$m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = m \left[ \frac{d^2 y_C}{d\gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{dy_C}{d\gamma} \ddot{\gamma} \right];$$

$$m \frac{d^2 z_C}{dt^2} = m \left[ \frac{d^2 z_C}{d\gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{dz_C}{d\gamma} \ddot{\gamma} \right],$$

где  $\frac{dy_C}{d\gamma} = -0,5H \sin \gamma - \frac{2d - D \cos \gamma (2 + \sin^2 \gamma)}{2 \sin^2 \gamma}$ ;

$$\frac{d^2 y_C}{d\gamma^2} = \frac{4d \cos \gamma - D(3 + \cos^4 \gamma)}{2 \sin^3 \gamma};$$

$$\frac{dz_C}{dt} = 0,5H \cos \gamma + 0,5D \sin \gamma;$$

$$\frac{d^2 z_C}{d\gamma^2} = -0,5H \sin \gamma + 0,5D \cos \gamma.$$

2. Для определения правых частей уравнений необходим анализ действующих на втулку сил. Движение втулки осуществляется силой тяжести, кроме нее на втулку в каждой точке контакта действуют две силы: нормальная реакция и сила трения.

Нормальная реакция  $N_K$  в точке  $K$  направлена перпендикулярно образующей вала, на которую опирается втулка.

В симметричных точках контакта втулка опирается своей кромкой на кромку вала, поэтому нормальная реакция в каждой из этих точек должна лежать одновременно в двух плоскостях, одна из которых проходит через ось вала, другая – через ось втулки. Следовательно, каждая из этих сил  $N_{B1}$  и  $N_{B2}$  направлена по ли-

нии пересечения этих плоскостей, т. е. проходит через точку  $O_3$  пересечения осей обеих деталей.

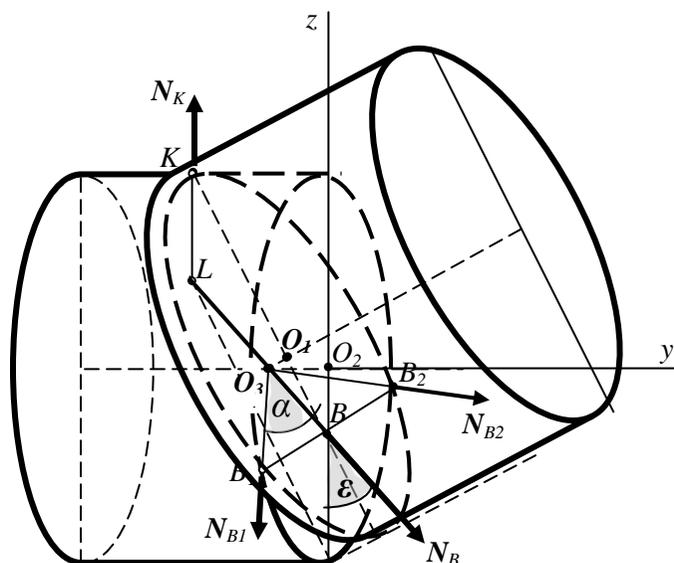


Рис. 3. Направление нормальных реакций, действующих на втулку в точках контакта

При плоскопараллельном движении втулки нормальные реакции в симметричных точках контакта равны по величине, а их равнодействующая  $N_B$  (рис. 3) проходит по прямой, соединяющей точку  $B$  с точкой  $O_3$ , и равна  $N_B = 2N_{B1} \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между одной из реакций  $N_{B1}$  или  $N_{B2}$  и равнодействующей  $N_B$  [2]. Значение угла  $\alpha$  определяется из треугольника  $OB B_1$ . Равнодействующая нормальных реакций  $N_B$  образует с вертикальной осью  $O_3 z$  угол  $\epsilon$ , значение которого определяется из треугольника  $O_3 O_2 B$ .

Силы трения во всех точках контакта направлены противоположно соответствующим скоростям (рис. 4). Следовательно, сила трения  $F_K$  в точке  $K$  направлена этой образующей вала противоположно скорости  $V_K$ .

Скорости симметричных точек контакта  $B_1$  и  $B_2$  равны скорости  $V_B$  точки  $B$  (рис. 4), являющейся серединой отрезка, соединяющего эти точки, и расположенной в плоскости симметрии.

Направление скорости  $V_B$  определяется с помощью мгновенного центра скоростей  $L$ , положение которого установлено для вертикальной схемы сборки и который находится в точке пересечения перпендикуляра к образующей вала в точке  $K$  и перпендикуляра, проведенного в точке  $A$  к прямой, являющейся продолжением образующей втулки. Следовательно, силы трения  $F_{B1}$  и  $F_{B2}$  в точках  $B_1$  и  $B_2$  равны по величине, параллельны и приводятся к равнодействующей, которая приложена в точке  $B$  и равна

$$F_B = 2F_{B1} = 2fN_{B1}.$$

Таким образом, силы, действующие на втулку, приводятся к плоской системе сил, расположенной в плоскости симметрии деталей (рис. 5), при этом направления реакций в точках контакта деталей в конкретный момент времени определяются положением мгновенного центра скоростей  $L$ . Линии действия

нормальных реакций  $N_K$  и  $N_B$  проходят через эту точку, а силы трения  $F_K$  и  $F_B$  перпендикулярны отрезкам, соединяющим точки их приложения с точкой  $L$ .

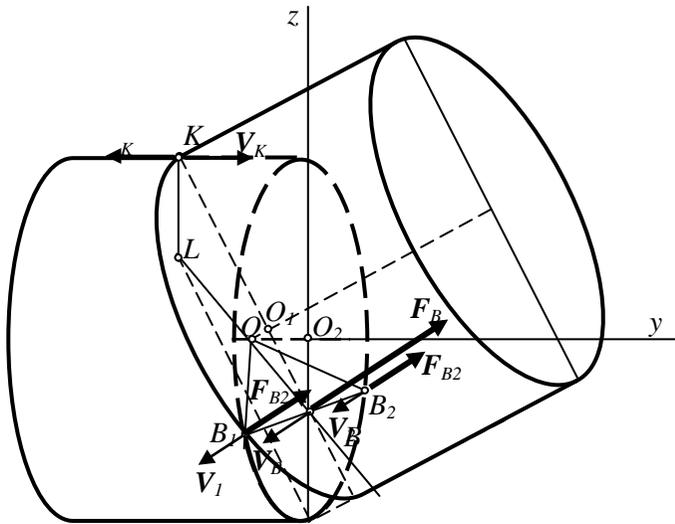


Рис. 4. Направления сил трения, действующих на втулку в точках контакта с валом

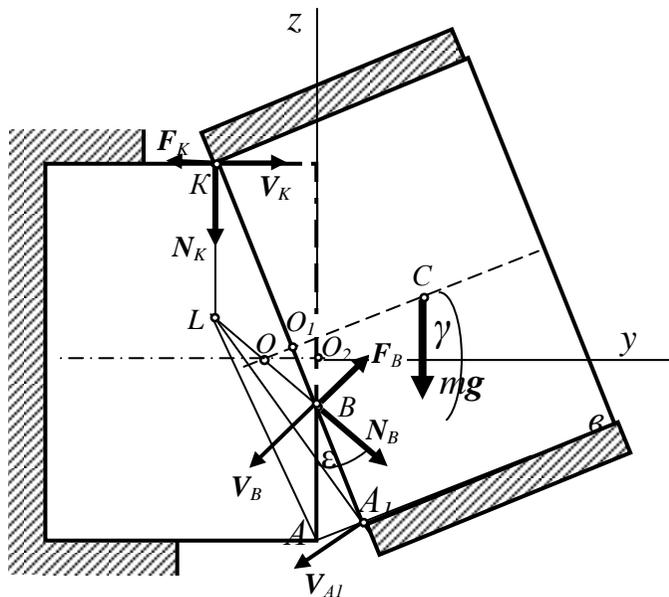


Рис. 5. Направления сил, действующих на втулку в точках контакта

На основе проведенного анализа определены проекции действующих сил на оси координат

$$\sum F_{ky} = -F_K + N_B \sin \varepsilon + F_B \cos \varepsilon,$$

$$\sum F_{kz} = -mg - N_K - N_B \cos \varepsilon + F_B \sin \varepsilon.$$

Обобщенная сила  $Q_\gamma$  равна сумме моментов относительно мгновенного центра  $L$  скоростей всех сил, приложенных ко втулке, при этом моменты нормальных реакций  $N_K$  и  $N_B$ , равны нулю, так как линии действия этих сил проходят через мгновенный центр скоростей  $L$ .

Следовательно,

$$Q_\gamma = -m_L(m\bar{g}) + m_L(\bar{F}_K) + m_L(\bar{F}_B) = -mg(y_C - y_L) + 2fN_{B1}l_B + fN_Kl_K,$$

где  $l_B = \frac{h_1}{\cos \varepsilon}$ ,  $l_K = \frac{2h_1}{\sin \gamma}$  – расстояния точек  $K$  и  $B$  до мгновенного центра скоростей  $L$ .

После всех преобразований дифференциальные уравнения, описывающие движение втулки в процессе совмещения, принимают вид

$$m\left[\left(\frac{dy_C}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dz_C}{d\gamma}\right)^2\right]\ddot{\gamma} + I_{Cx}\ddot{\gamma} + m\left(\frac{dy_C}{d\gamma} \frac{d^2y_C}{d\gamma^2} + \frac{dz_C}{d\gamma} \frac{d^2z_C}{d\gamma^2}\right)\dot{\gamma}^2 = ; \quad (1)$$

$$= -mg(y_C - y_L) + 2fN_{B1}LB + fN_KKL$$

$$m\left[\frac{d^2y_C}{d\gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{dy_C}{d\gamma} \ddot{\gamma}\right] = -fN_K + 2N_{B1}(\sin \alpha \sin \varepsilon + f \cos \varepsilon); \quad (2)$$

$$m\left[\frac{d^2z_C}{d\gamma^2} \dot{\gamma}^2 + \frac{dz_C}{d\gamma} \ddot{\gamma}\right] = -mg + N_K - 2N_{B1}(\sin \alpha \cos \varepsilon - f \sin \varepsilon). \quad (3)$$

Полученная система уравнений (1), (2) и (3) связывает между собой три неизвестные переменные: угол  $\gamma$ , являющийся функцией времени, и динамические реакции  $N_K$  и  $N_B$ , являющиеся функциями угла  $\gamma$ . Совместное решение первых уравнений (1) и (2) определяет значения  $N_K$  и  $N_B$  в зависимости от угла  $\gamma$  и его производных

$$N_K = m\left[A_{K1}g + A_{K2} \frac{d^2\gamma}{dt^2} + A_{K3}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right], \quad (4)$$

$$N_B = m\left[f g + A_{B2} \frac{d^2\gamma}{dt^2} + A_{B3}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right], \quad (5)$$

где все коэффициенты  $A_{K1}$ ,  $A_{K2}$ ,  $A_{K3}$ ,  $A_{B2}$ ,  $A_{B3}$  являются функциями угла  $\gamma$ .

Значения  $N_K$  и  $N_B$  были подставлены в уравнение (3), которое после преобразований стало уравнением с одной переменной  $\gamma(t)$ .

$$\left[A_1 \frac{d^2\gamma}{dt^2} + A_2 \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right] + gA_3 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, все его коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  не содержат массу  $m$  втулки, следовательно, искомая функция  $\gamma(t)$  зависит только от геометрических параметров совмещаемых деталей.

Решение уравнения (6) было выполнено графически в программе Mathcad для деталей с размерами  $d = 49,9$  мм,  $D = 50$  мм,  $H = 70$  мм.

На рис. 6 представлен график зависимости от времени угла  $\gamma = \gamma(t)$ , начало которого соответствует первоначальному контакту деталей в трех точках  $\gamma_0 = 0.4$  рад. Завершение контакта происходит при  $\gamma_k = \arccos \frac{d}{D} = 0.07$ , что соответствует моменту времени  $t_k = 1,5$  с.

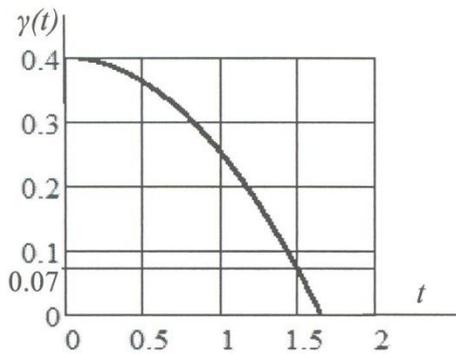


Рис. 6. График зависимости угла от времени  $\gamma = \gamma(t)$

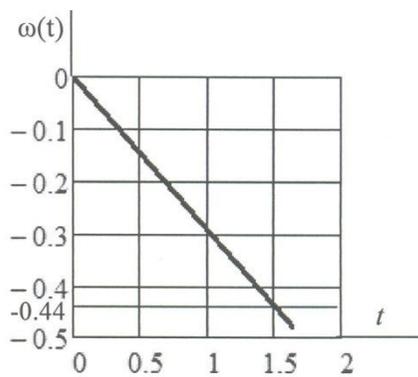


Рис. 7. График зависимости угловой скорости от времени  $\omega = \omega(t)$

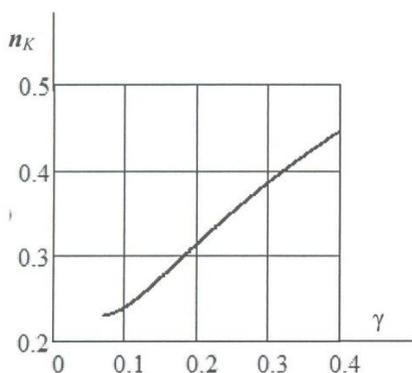


Рис. 8. Зависимость реакции  $N_K$  от угла между осями деталей

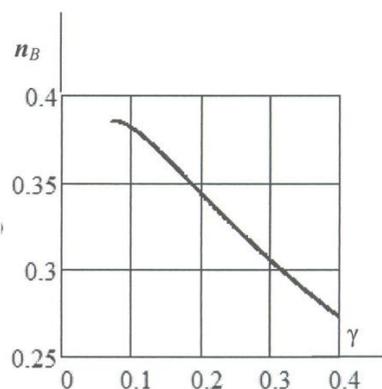


Рис. 9. Зависимость реакции  $N_B$  от угла между осями деталей

График зависимости угловой скорости от времени  $\omega = \omega(t)$  (рис. 7) представляет собой прямую линию; следовательно, угловая скорость пропорциональная времени, угловое ускорение втулки является постоянной величиной, равной  $\varepsilon = \frac{\omega_k}{t_k} = -0,28 \text{ 1/c}^2$ , а угловая скорость может быть представлена формулой

$$\omega_k = -\varepsilon t.$$

Нормальные реакции  $N_K$  и  $N_B$  после подстановки полученных значений в уравнения (5) и (6) принимают вид

$$N_K = m(A_{K1}g + A_{k2} \varepsilon + A_{K3}\omega^2); \quad N_B = m(f g + A_{B2}\varepsilon + A_{B3}\omega^2).$$

Полные динамические реакции с учетом сил трения после преобразований равны

$$R_K = m(A_{K1}g + A_{k2} \varepsilon + A_{K3}\omega^2)\sqrt{1 + f^2}; \quad R_B = m(f g + A_{B2}\varepsilon + A_{B3}\omega^2)\sqrt{1 + f^2},$$

а их отношения к силе тяжести втулки  $n_K = \frac{R_K}{mg}$  и  $n_B = \frac{R_B}{mg}$  позволяют оценить

меру взаимодействия деталей в точках контакта, зависимости которых от угла  $\gamma$  представлены на рис. 8 и 9.

Как следует из графиков (см. рис. 8 и 9), максимальные значения динамиче-

ских реакций в течение всего процесса совмещения не превышают силу тяжести втулки, в то время как при вертикальном способе сборки реакции, возникающие при минимальных значениях сборочных усилий, на два порядка больше значения сил тяжести подвижной детали [2].

Таким образом, рассматриваемая горизонтальная схема сборки отличается тем, что совмещение деталей осуществляется силой тяжести втулки и не требует дополнительных сборочных усилий, при этом силы взаимодействия в точках контакта не превышают силы тяжести, что исключает заклинивание деталей и повреждение совмещаемых поверхностей.

### **Выводы**

Рассмотрена схема сборки цилиндрических деталей, при которой втулка под действием силы тяжести перемещается, опираясь на три точки поверхности горизонтально закрепленного вала. Определены кинематические закономерности этого движения, установлены направления динамических реакций, возникающих в точках контакта деталей.

Составлена система дифференциальных уравнений, описывающих движение втулки, которая представляет собой динамическую модель процесса совмещения цилиндрических деталей для горизонтальной схемы сборки.

Приведены результаты решения дифференциальных уравнений с помощью программы Mathcad для конкретных деталей, которые показали, что динамические реакции не превышают значения силы тяжести втулки, что исключает заклинивание деталей и повреждение их поверхностей в процессе сборки.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Патент на изобретение № 2487003. Способ сборки цилиндрических деталей с гарантированным зазором. Сам. гос. техн. ун-т, Черняховская Л.Б., Балакиров С.Н., Косулин С.И.
2. Черняховская Л.Б. Кинематический и динамический анализы автоматической сборки цилиндрических деталей: Монография. – Самара: Самар. гос. ун-т, 2011. – 76 с.

*Статья поступила в редакцию 28 января 2014 г.*

## **DYNAMICAL MODEL OF THE HORIZONTAL SCHEME OF AUTOMATIC ASSEMBLY OF CYLINDRICAL DETAILS**

***L.B. Chernyahovskaya***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

*The scheme of the assembling of cylindrical details was considered. During the assembling a bush moves under the influence of the gravity, leaned on the surface of the horizontally fastened shaft. The kinematic laws of such of this movement, defined by the three-point contact, was established. The directions of the dynamical reaction force at the contact points were established. The system of the differential equations, being the dynamical model of the horizontal assembly of cylindrical details, and describing the motion of the bush, was formed.*

***Keywords:*** cylindrical details, horizontal scheme of assembling, three-point contact, velocities, dynamical reaction forces.